В. М. Резников

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ КОНЦЕПЦИИ: АНАЛИЗ ОСНОВАНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЙ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ФИЛОСОФИИ И ПРАВА

В. М. Резников

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ КОНЦЕПЦИИ: АНАЛИЗ ОСНОВАНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЙ

Монография

Новосибирск
2005

УДК 167
ББК Ю25
Р 344

Резников В. М. Вероятностные концепции: анализ оснований и приложений: Монография. Новосибирск, 2005. 158 с.

ISBN 5-94356-341-5

Монография посвящена методологическому анализу проблемы корректного применения статистических теорий как в области философии, так и в практике научных исследований. В центре внимания находится проблема объекта частотных эмпирических теорий, которые наиболее популярны в приложениях, а в последнее время используются и для анализа философских проблем. Часть книги посвящена исследованию проблем, инвариантных типу используемой статистической интерпретации и имеющих значимость как для методологии науки, так и для методологии корректного применения статистических методов.

Книга предназначена специалистам и студентам в области философии и методологии науки, методологии статистики и статистического анализа.

Рецензенты
д-р филос. наук, проф. В. Н. Карпович,
канд. техн. наук Е. Е. Витяев

Утверждено к печати ученым советом Института философии и права СО РАН.

ISBN 5-94356-341-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга посвящена исследованию проблемы эффективности эмпирических частотных теорий и дедуктивных вероятностных теорий как для решения философских проблем, так и для использования в практике научных исследований. Мы уверены, что критерии эффективности для дедуктивных вероятностных теорий и эмпирических частотных теорий являются различными.

Критерий эффективности эмпирических теорий строится исходя из признания первичного существования данных, полуэмпирические частотные характеристики существуют, если они обладают определенными свойствами, в частности устойчивостью. Теоретические величины являются представителями устойчивых полуэмпирических характеристик. В обобщенном виде проблема эффективного применения частотных концепций получила название проблемы объекта эмпирической теории. Корректное решение этой проблемы обеспечивает применение теории для объектов, для которых эта теория разрабатывалась. Это позволяет избежать многих ошибок. Первая глава книги посвящена проблеме объекта в работах математиков и философов.

Впервые эту проблему для фундаментальных частотных теорий поставил фон Р. Мизес. Теория Мизеса предназначена для коллективов, являющихся бесконечными последовательностями. Закон этих последовательностей не известен, но известно, что они удовлетворяют двум эмпирическим законам: сходимости и иррегулярности.

Проблема объекта заключается в оценивании, обладают ли данные свойствами, которыми обладают идеальные объекты теории? Мы полагаем, что эта проблема имеет философскую, методологическую и прагматическую значимость. Философская значимость основана на том, что эта проблема является вариантом проблемы индукции. Значимость проблемы индукции для философии высока. То, что она не решена, оценивается философами как скандал в философии. Прагматическая значимость связана с тем, что частотные теории являются объективистскими и поэтому они представляют интерес для науки.

Частотные концепции никогда не были особо популярными. Тем не менее их анализом занимались крупные философы и математики, например Мизес, Рейхенбах, Колмогоров. В работах Мизеса не было обнаружено попыток решения этой проблемы. Колмогоров предложил финитный вариант частотной концепции, он сформулировал конструктивный вариант требования иррегулярности, но ему не удалось получить конструктивные теоремы в рамках частотной концепции. Неразработанность строгой методологии применения частотных концепций классиками свидетельствует о сложности проблемы. По глубокому убеждению автора этой книги, невозможность разработки строгой методологии не является препятствием для получения приблизительного приемлемого решения.

Наиболее популярны в приложениях частотные теории Фишера и Неймана–Пирсона, поэтому для этих теорий особо актуальной является проблема объекта. Полным объектом теории являются случайные величины с заданным законом распределения с точностью до известных параметров распределения. В этих концепциях проблема объекта специально не выделена. Тем не менее ряд разделов, например проверки гипотез, оценивания параметров, специально направлен на решение этой проблемы. Специалисты в области статистики прекрасно знают, что строгое решение этих проблем сопряжено с огромными трудностями и поэтому проблема объекта не решена, да и не может быть решена теоретическими методами.

Поводом к написанию книги явилось возникновение и становление современной прикладной статистики. Точками роста этого раздела знания являются метрологическая концепция, компьютерное моделирование, интервальный анализ и ряд других направлений. Впервые в отечественной методологической литературе нами дан анализ метрологической концепции. Это эмпирическая частотная концепция, и она обеспечивает решение проблемы объекта полуэмпирическими методами, где объектом являются данные, обладающие устойчивыми статистическими характеристиками.

Методология метрологического статистического анализа представляет интерес для специалистов в конкретных областях, заинтересованных в сознательном применении стандартных теорий. Это связано с тем, что метрологическая концепция выполняет роль пропедевтики к применению стандартных статистических теорий, а результаты, относящиеся к метрологической концепции, опубликованы в узкоспециализированных изданиях.

Методологические принципы прикладной статистики и конкретные методы обеспечивают решение проблем, недоступных методам теоретического статистического анализа. Так, методология компьютерного моделирования обеспечивает получение распределений критериальных статистик недоступных аналитическим методам. Направление прикладной статистики открывает новые области для философского анализа, связанного с основаниями эмпиризма и с развитием эмпирических теорий, так как в рамках чистого эксперимента невозможна оценка точности полученных результатов.

Другим импульсом к публикации книги послужили работы Д. Майо, связанные с применением концепции Неймана–Пирсона для анализа известных философских проблем, таких как анализ Дюгема–Куайна, и анализа проблемы недоопределенности теоретического знания. Применение частотной концепции как средства строгой проверки гипотез, имеющих философскую значимость, делает актуальным философский анализ проблемы объекта.

Вторая глава монографии посвящена субъективистским концепциям, потому что в последние годы субъективистские концепции, особенно концепция Байеса, являются популярными. Байесовская концепция популярна у философов в качестве аппарата исследования теологической проблематики, а также для исследования проблемы степени подтверждения гипотез. Последняя проблема является ключевой для логики индукции. Одним из препятствий в создании индуктивной логики является принцип индифферентности, с помощью которого осуществляется задание исходных вероятностей. Применение принципа индифферентности сопряжено с многочисленными парадоксами. Появление новых аргументов в пользу обоснованности этого принципа явилось еще одним поводом к написанию книги. В монографии исследованы новые подходы к знаменитому парадоксу смеси воды и вина, а также дан анализ этого принципа в контексте широко обсуждаемой лотереи Monty-Hall.

В известной методологической литературе байесовская и фишеровская концепция считаются непримиримыми оппонентами. Представители байесовской концепции считают, что байесовская теория вероятностей является индуктивной логикой. Представители фишеровской концепции критикуют субъективизм байесовской парадигмы. Пропоненты Фишера полагают, что следование принципам Фишера обеспечивает принятие гипотез с минимальными возможными ошибками. Нами показано, что оба подхода с весьма сущностных позиций обнаруживают единство.

В отличие от первых двух глав, где рассмотрены проблемы эффективности частотных теорий и субъективистских теорий, в заключительной главе дан анализ проблем, малозависящих от типа вероятностной интерпретации. Исследуются проблемы формализации каузальных зависимостей и их применение для анализа логического фатализма. Кроме того, изучаются современные подходы к анализу вероятностных нелогических парадоксов агрегации и некоторые другие философские проблемы.

Огромное множество разнообразных проблем, сущностно связанных с экспликацией понятия »вероятность», анализом вероятностных рассуждением, созданием вероятностной логики, развитием вероятностной метафизики, созданием, развитием и корректным применением статистических моделей, безусловно, предполагает выделение этого комплекса проблем в самостоятельное научное направление.

В западной философской литературе направление, охватывающее спектр философских и методологических проблем, относящихся к вероятностной тематике, получило название пробабилизм. В отечественной литературе вероятностная тематика не имеет специального названия, и нам представляется уместным название алеаторика, в частности такое название предложено в работе [1]. Мы надеемся, что наша работа будет в какой-то степени способствовать выделению алеаторики в самостоятельное научное направление.

ВВЕДЕНИЕ

Прикладные проблемы в философской литературе менее популярны, чем теоретические проблемы. В частности, проблемы оснований математики, полноты дедуктивных теорий, парадоксы теории множеств являются более популярными, чем проблемы корректного применения и эффективности математики.

Нельзя сказать, что проблема эффективности математики совсем осталась вне философского анализа. Известны позиции Мадди и Куайна о неустранимости математики из состава научной теории, восторженная оценка Вигнера о непостижимой эффективности математики в естественных науках, умеренная оценка о значимости математики Филда [2–3]. Но все эти оценки относятся к применению дедуктивных теорий в традиционно успешных областях приложений, каковыми являются естественные науки.

Наибольшую популярность у работающих математиков и прикладников в стохастической математике имеют статистические теории Фишера и Неймана–Пирсона [4; 5]. В известной литературе даны многочисленные примеры неадекватного применения этих теорий при использовании в медицине, биологии, метрологии и других дисциплинах [6–9]. В некоторых работах критикуется адекватность статистического анализа традициям естествознания [6; 10].

1. В связи с вариабельностью оценок эффективности дедуктивных и индуктивных формализаций необходимы различные критерии эффективности – как для формальных дедуктивных теорий, так и для эмпирических статистических теорий. Вначале рассмотрена проблема, связанная с эффективностью дедуктивных теорий. Для достижения этой цели ставится задача: формулирование критериев эффективности дедуктивных статистических теорий, таковыми, например, являются классическая концепция теории вероятностей, субъективистская и логические концепции вероятности и некоторые другие.

2. Для того чтобы некоторый вариант теории вероятностей был использован корректно: необходимо задать пространство элементарных событий, пространство событий и вероятностную меру на пространстве элементарных событий. Задание пространств событий и элементарных событий в практических задачах, как правило, не вызывает проблем. Сложнее обстоит дело с заданием исходных вероятностей.

Наиболее популярным способом задания исходных вероятностей служит метод индифферентности. Известно, что применение принципа индифферентности приводит к многочисленным парадоксам. Наиболее тяжелым парадоксом даже среди сторонников этого метода считается парадокс воды–вина, предложенный Мизесом [11].

2a. В связи с этим нами сформулирована задача: исследовать основания парадокса смеси воды и вина.

2b. Исследовать новые подходы к спасению принципа индифферентности, в частности подход Миккельсона, и исследовать новые задачи, в которых принцип индифферентности приводит к парадоксам, в частности задачу лотереи Monty Hall и задачу о кубике, сформулированную Ван Бас Фраазеном [12–14].

3. Не вызывает сомнения, что аксиоматический вариант теории вероятностей Колмогорова является наиболее совершенным в математическом плане. Известны попытки применения колмогоровской теории вероятностей в субъективистской теории вероятностей.

В целях легитимного применения математики ставится задача об адекватности колмогоровской аксиоматики субъективистской концепции теории вероятностей.

4. Общепризнано, что впервые эксплицировал проблему объекта эмпирической теории Р. Мизес. Эта проблема является чрезвычайно значимой для корректных приложений теории. Очевидно, что теория даст наилучшее предсказание или наилучшую аппроксимацию, если данные составляют объект эмпирической теории.

Объекты теорий описываются с помощью введенного нами понятия базовых свойств. Свойство называется базовым, если наличие этого свойства логически не выводимо из комбинации других свойств, в том числе и базовых свойств. К таким свойствам в теории вероятностей относится свойство независимости и распределение вероятностей. В математической статистике это однородность данных. Мы полагаем, что проблема объекта является основной проблемой прикладных эмпирических теорий. В этой связи актуальной является следующая задача.

Имеет ли проблема объекта окончательное решение с помощью теоретических методов?

5. Несмотря на впечатляющее число статистических концепций, наибольшее распространение получили объективистские статистические концепции. Это связано с тем, что объективистские теории наиболее адекватны для самых разных наук. Первой известной фундаментальной эмпирической частотной концепцией является концепция Мизеса. Теория Мизеса не получила широкого внимания ни со стороны философов, ни со стороны представителей чистой математики.

Основная критика теории Мизеса:

5.1. Теория не приложима для анализа сингулярных событий.

5.2. Требование иррегулярности не было им корректно описано.

5.3. Теория Мизеса не является аксиоматизированной теорией.

5.4. Требование аддитивности для счетных последовательностей не имеет эмпирической интерпретации.

Судя по критике, замечания исходили от вероятностников-субъективистов, представителей чистой математики и, быть может, философов-эмпириков. С позиций прикладной математики основной слабостью является неразработанность методологии, для исследования вопроса: могут ли считаться данные объектом эмпирической теории? Мы полагаем, что методология применения частотных теорий не разработана ни Мизесом, ни другими математиками, в том числе Колмогоровым.

5a. В связи с этим ставится задача определения причин неразработанности методологии применения фундаментальных теорий в практике научных исследований?

Известна дилемма о статусе требований Мизеса к коллективам. Суть дилеммы, предложенные Мизесом требования к коллективам касаются абстрактных объектов теории, или эти требования также относятся и к реальным данным? Мы полагаем, что решение этой дилеммы будет получено путем анализа подходов Мизеса к решению практических задач. Адекватной постановкой для решения этой проблемы представляется следующая задача.

5b. Использовал ли Мизес при решении практических задач разработанные им требования к коллективам? Если да, то, каким образом он применял разработанные требования к реальным данным?

6. Наиболее популярными в приложениях являются теории Фишера и Неймана–Пирсона. В философской и математической литературе они считаются эмпирическими частотными теориями [15]. В концепциях Фишера и Неймана–Пирсона имеется множество фактов, не имеющих ни частотной, ни эмпирической интерпретации.

6a. В связи с этим ставятся задача формулирования критериев эмпиричности и частотности статистических теорий.

6b. Являются ли теории Фишера и Неймана–Пирсона эмпирическими и частотными?

7. Проблема объекта эмпирической теории, впервые сформулированная Мизесом для фундаментальных теорий является значимой и для нефундаментальных теорий. Во-первых, наиболее корректным и эффективным будет применение теории для данных, представляющих объект этой теории. Во-вторых, нефундаментальные статистические теории широко применяются, поэтому является актуальной проблема объекта для статистических теорий Фишера и Неймана–Пирсона. Решение этой проблемы может быть в существенной степени получено решением следующих задач:

7a. Реконструкция проблемы объекта в теории Фишера.

7b. Философский и методологический анализ адекватности статистических методов в концепции Фишера для решения проблемы объекта эмпирической теории.

8. Рандомизация – искусственное привнесение случайности. Фишер считал, что недостатки многих статистических методов, например незнание и неспособность контроля фоновых условий компенсируются предложенным им принципом рандомизации [16]. Рандомизация чрезвычайно популярна в психологии и медицине. Нерандомизированные эксперименты в терапии не являются легитимными [17]. В связи с этим представляется актуальной следующая задача.

Дать анализ значимости и обоснованности концепции рандомизации в контексте решения проблемы объекта.

9. Устойчивые статистические характеристики имеют первостепенное значение для приложений. Для объектов с устойчивыми статистическими характеристиками возможен точный прогноз. Возникает вопрос: имеются ли в арсенале теории вероятностей, которая является теоретической базой математической статистики теоремы, теоретические результаты, обеспечивающие решение проблемы объекта с устойчивыми характеристиками? В методологической и математической литературе такой теоремой считается теорема закона больших чисел [18]. В связи с этим актуальной является следующая задача.

Исследовать обоснованность оснований для эпистемологического и прагматического статуса теоремы закона больших чисел в подходах Колмогорова, Алимова и др.

10. В 2003 г. мировая общественность отмечала 100-летие со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова и 70-летие выхода в свет первого издания его книги «Основные понятия теории вероятностей» [19]. В связи с проблемой корректных приложений представляет интерес параграф этой книги, посвященный проблеме связи теоретических и эмпирических величин в статистике. Там же Колмогоров писал, что по отношению к проблеме приложений, он в целом придерживается взглядов Мизеса. С позиций проблемы корректных приложений исследование влияния Колмогорова является чрезвычайно значимым. Отсюда решение этой проблемы предполагает решение следующих задач:

10а. Влияние книги А. Н. Колмогорова на проблему корректных приложений вероятностной математики?

10b. Являлся ли Колмогоров сторонником частотной вероятностной концепции?

11. Сложности решения проблемы объекта теоретическими методами привели к появлению метрологической концепции, разработанной преимущественно Ю. И. Алимовым [6; 20]. Концепция Алимова опирается на концептуальный аппарат метрологии, и методологию прикладной математики. По Алимову, основная задача прикладной статистики заключается в получении устойчивых спастических характеристик.

В работе Алимова выделяются две части: критическая и позитивная. В критической части показано, что:

1) в концепции Фишера осуществляется доминирование теоретического знания над эмпирическим. У Фишера теоретические объекты существуют априори, выборки используется для оценки неизвестных параметров априори существующего теоретического распределения;

2) понятие доверительного интервала не имеет частотной интерпретации;

Кроме того, показана неубедительность принятия базовых свойств, например независимости на основе контроля экспериментальных событий в совокупности с интуицией.

В позитивной части предложена методология и конкретные алгоритмы для решения проблемы объекта для ряда практически значимых случаев.

Ввиду актуальности и значимости для приложения метрологической концепции нами сформулирован ряд задач, позволяющих исследовать основания метрологической концепции:

11a. Исследовать основания метрологической концепции.

11b. Исследовать связь метрологической концепции с концепциями Мизеса и Фишера.

12. Каждая вероятностная интерпретация имеет свои границы применимости. Объективистская для анализа регулярностей, имеющих массовый характер, субъективистская для анализа сингулярных ситуаций, логическая для определения степени выводимости одного суждения из посылок. В то же время существует множество проблем, постановки которых (в огромной степени и подходы к их решению) мало связаны с используемой интерпретацией.

К такого рода проблемам относятся вероятностные каузальные формализации [21–22]. Каузальные формализации имеют большое значение для углубления знаний о природе причинных закономерностей, для развития метода формализации причинных зависимостей, а также для анализа проблем, в которых используется каузальная аргументация. Каузальная аргументация применяется Лукасевичем в качестве контраргумента к проблеме логического фатализма. Лукасевич вместе с причинной аргументацией использует понятие бесконечности [23]. Мы полагаем, что апелляции к понятию бесконечности можно избежать, используя неуниверсальные свойства причинных связей. Для решения этой проблемы представляется адекватным решение двух задач:

12a. Дать классификацию свойств причинных связей по степени универсальности этих свойств.

12b. Дать модификацию каузального аргумента Лукасевича на основе свойства нетранзитивности каузальных связей.

13. Прежде чем искать причинные зависимости, полезно убедиться, что исследуемые феномены не являются независимыми. Наиболее интересным результатом в области функциональной причинности считается теорема Мьюйлока [24]. Отсюда возникает задача – дать анализ теоремы Мьюйлока о связи независимости и причинной зависимости.

14. Использование аппарата условных вероятностей для описания причинных зависимостей и других закономерностей приводит к так называемым парадоксам агрегации. Это вероятностные нелогические парадоксы. Наиболее известным является парадокс Симпсона [25]. Существуют различные подходы к объяснению, описанию механизмов генерации и к избеганию парадоксов. Мы полагаем, что эпистемологическая значимость парадокса переоценивается. Незамеченной осталась прагматическая проблема принятия решений, когда парадокс имеет место. Поэтому являются важными две задачи:

14a. Дать анализ онтологического подхода Картрайт, функционально-вероятностного подхода Мьюйлока и методологию генерации парадокса.

14b. Предложить методологию принятия решений, когда парадокс Симпсона имеет место.

Эти и некоторые другие задачи с различной степенью детальности были исследованы в этой небольшой по объему монографии.

Глава 1. АНАЛИЗ ОСНОВАНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЙ ЧАСТОТНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ И ВЕРОЯТНОСТНЫХ КОНЦЕПЦИЙ

Первая глава преимущественно посвящена анализу проблемы объекта эмпирических частотных теорий. В первом параграфе проанализированы философские позиции Мизеса, впервые сформулировавшего проблему объекта для фундаментальных частотных теорий. Дан анализ требований Мизеса к коллективам, которые являются объектами предложенной им теории. Показано, что Мизесом не была предложена методология определения соответствия данных требованиям к коллективам. Во втором параграфе дан философский и методологический анализ частотной концепции Рейхенбаха. Показано, что жесткие требования к существованию объектов теории являются вкладом Рейхенбаха в уточнение проблемы объекта.

Третий параграф посвящен анализу статистической концепции Фишера. В работах Фишера проблема объекта как методологическая проблема не была им выделена. Предлагается методологический анализ оснований проверки гипотез, оценивания параметров, принципа рандомизации и других новаций Фишера, для того чтобы определить обеспечивает ли концептуальный аппарат Фишера решение проблемы объекта.

Четвертый параграф посвящен анализу статистической концепции Неймана–Пирсона. В отличие от Фишера, разработавшего методологию проверки одной гипотезы, в концепции Неймана–Пирсона разработана методология проверки нескольких гипотез. В теоретическом плане концепция Неймана–Пирсона более совершенна, чем Фишера. В то же время концептуальные основания этих теорий одинаковы. Поэтому эти концепции не обеспечивают решение проблемы объекта теории.

В пятом параграфе дан анализ влияния чистой математики на проблему корректного применения математики. В качестве примера рассмотрено влияние известной книги Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей» на проблему корректного применения прикладной статистики.

В шестом параграфе дан анализ теоремы закона больших чисел. Исследуются основания высокого эпистемологического статуса этой теоремы. Исследуется вопрос о значимости этой теоремы в контексте решения проблемы объекта.

В седьмом параграфе исследована проблема взаимоотношения методологии прикладной математики, развитой в России, и западного философского направления «Новый эмпиризм». Показано, что концептуальной основой обоих направлений является эмпиризм. Для эмпиризма характерно признание относительной независимости эксперимента от теоретического знания и убеждение в принципиальном отставании развития теории от запросов практики научных исследований. Показано, что концептуальные основания эмпиризма и практика естествознания являются основой для постановки и решения проблемы объекта.

В восьмом параграфе исследована метрологическая концепция статистики. Объектом этой теории являются данные с устойчивыми статистическими характеристиками. Показано, что метрологическая концепция обеспечивает решение проблемы объекта на основе полуэмпирических методов. В последнем параграфе первой главы дан анализ проблемы случайности в контексте теории сложности, разрабатываемой Колмогоровым и его учениками, а также анализ этой проблемы с учетом влияния шума, который важен для анализа физических моделей.

§ 1. Концепция Мизеса: философский и методологический анализ

Что привело к появлению объективистских эмпирических концепций?

К появлению объективистских эмпирических концепций привели следующие причины. Во-первых, отсутствие основательных обоснований принципа индифферентности, применение которого вызывает многочисленные парадоксы. Во-вторых, потребности науки в объективистской концепции вероятности, обеспечивающей адекватное описание разнообразных случайных и вероятностных процессов.

Некоторые идеи объективистской концепции были развиты в работах Венна, Кейнса и других исследователей. Впервые развернутый вариант объективистской теории был создан Р. фон Мизесом в 1929 г.

В объективистском варианте вероятность – это некоторое свойство материального мира явлений. Какие требования предъявляются к объективистской характеристике? Эта характеристика должна быть измеримой, устойчивой, прогнозируемой. В качестве таких характеристик в науке используются средние частоты и другие статистические характеристики. Специалистам в области статистики и специальных областей знания хорошо известны весьма точные границы вариабельности таких частотных характеристик как число автомобильных столкновений в скользкую погоду, число суицидов в течение года и границы вариабельности других самых различных статистических характеристик [27].

В настоящее время к эмпирическим частотным концепциям относят следующие концепции: теорию вероятностей и математическую статистику Мизеса, теорию вероятностей Рейхенбаха, математическую статистику Фишера, математическую статистику Неймана–Пирсона и метрологическую концепцию статистики Алимова.

Мизес, основатель первой эмпирической вероятностной концепции на основе частотного подхода, известен как высокопрофессиональный ученый в области аэродинамики, теории вероятностей и математической статистики. Активная деятельность в области науки не помешала Мизесу стать крупным философом в области философии науки. Наиболее близка ему была позитивистская философия, в особенности философия Маха.

Следуя позитивизму, состоятельными науками являются математика и естественные науки. Мизес относил теорию вероятностей к естественно-научным дисциплинам, в которых активно используется математический аппарат. Например, механика и теория вероятностей являются близкими по духу дисциплинами. До появления аксиоматики Колмогорова теорию вероятностей относили к естественно-научным дисциплинам. Традиционное отношение к теории вероятностей как естественно-научной дисциплине отражено в формулировке шестой проблемы Гильберта. Эта формулировка опирается на успешно осуществленную Гильбертом аксиоматизацию геометрии.

Гильберт полагал, что аксиоматизация знания имеет огромное значение как для математики, так и для естествознания. Он писал: «С исследованиями по основаниям геометрии связана задача об аксиоматическом построении по этому же образцу тех физических дисциплин, в которых уже теперь математика играет выдающуюся роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика» [28, с. 34].

Многие авторы справедливо считают, что теория вероятностей и механика в большой мере различными дисциплинами. Так, Хакинг отмечает, что если при длительных измерениях железного метрового стержня получаются результаты, отличающиеся в два раза, то результаты измерений не заслуживают доверия. В то же время для статистических измерений получение характеристик, отличающихся в два раза на разных выборках из одной генеральной совокупности, является вполне допустимым [27].

Тем не менее разрабатываемый Мизесом вариант теории вероятностей и механика имеют существенную общность. Обе эти дисциплины своим возникновением обязаны потребностям практики, и они являются эмпирическими науками.

В работе Гиллеса предложена корректная реконструкция методологических принципов исследователя в области статистики, который разрабатывает эмпирическую статистическую теорию [29–30]. Исходной реальностью являются наблюдаемые феномены. Поэтому эмпирик начинает исследование с пассивных наблюдений изучаемых феноменов и активных экспериментов с ними, а также с изучения результатов экспериментов других исследователей. На следующем этапе исследований с помощью идеализаций определяется формальный объект исследований.

На основании предыдущих этапов исследований эмпирик обнаруживает некоторые эмпирические регулярности. С помощью абстрагирования и использования идеализаций формулируются эмпирические законы. На следующем этапе осуществляется построение аксиоматической эмпирической теории. Используя метод формализации, из законов теории выводятся всевозможные следствия. Полученные следствия сравниваются с наблюдаемыми явлениями природы. Это позволяет проверить правильность полученной теории, осуществить модификацию теории, если она не согласуется с новыми данными исследований, или опровергнуть теорию при радикальном несоответствии теории и эксперимента.

Проделанный Мизесом анализ различных подходов к определению понятия вероятности показал, что предшествующие работы были посвящены исследованию субъективистских концепций вероятности [11]. Так, вероятности в подходах Лапласа и Канта означали степень уверенности. Для Канта эта степень уверенности должна быть больше 1/2. Другие подходы к описанию вероятности подчеркивали определенную связь вероятности с истиной. Вероятность – это то, что сходно с истиной, или нечто находящееся посередине между истинным и ложным.

В работах предшественников не было обнаружено адекватное определение объективистской вероятности, поэтому возникла необходимость самостоятельного введения определения объективистской вероятности. Вероятность является характеристикой объекта эмпирической теории. Для корректного выделения объекта теории необходимо опираться на эмпирический материал, представляющий изучаемый феномен.

Эмпирическая концепция Мизеса опиралась на данные, относящиеся к трем различным областям знания. Первая область относится к области азартных игр. Успешная деятельность многочисленных игорных домов и предприятий по организации лотерей показывает, что используемое в этой области понятие вероятности является адекватной практике игорного бизнеса.

Вторая область относится к страховому бизнесу. В это время в Германии работали 23 страховые компании с общим числом застрахованных порядка 900 тыс. человек [11, с. 23].

Третья область данных относилась области статистической физики. Методология статистической физики является типичным образцом статистической методологии. Методы статистической физики позволили измерить среднюю скорость молекул, при этом измерение скорости индивидуальной молекулы не может быть осуществлено.

Отличительной особенностью подхода Мизеса является скрупулезный анализ проблемы объекта эмпирической теории. Поэтому в философии науки Мизесу заслуженно отдана пальма первенства в глубокой постановке проблемы объекта в прикладной математике, на примере теории вероятностей [31]. Теория вероятностей применяется исключительно для коллективов, являющихся последовательностями, удовлетворяющими трем постулатам: сходимости, иррегулярности и аддитивности. Проблема объекта заключается в определении, составляют ли данные исследований коллектив?

Проблема объекта означает, что математика, как и наука в целом, может быть использована для исследования только определенных объектов, а не произвольных объектов. Постановка проблемы о границах применимости математики связана как с общефилософскими воззрениями Мизеса, так и с его практикой использования математического аппарата в аэродинамике.

Что является общим в объектах, относящихся к деятельности игорных и страховых компаний, а также к объектам, относящимся к статистической физике? Прежде всего, это практически неограниченная повторяемость экспериментов в одинаковых условиях. Мизес пишет: «Бросание пары хороших костей практически повторяемо почти бесконечное число раз» [11, с. 14]. И далее: «Если нам нужно исследовать какой-либо вопрос страхования, то мы видим перед собой огромную массу застрахованных, мы видим частое повторение единичного случая, регистрируемого страховым обществом» [Там же].

Повторяемость эксперимента в сходных условиях является существенным признаком формируемого объекта теории. Учет повторяемости, безусловно, ограничивает применение теории вероятностей. Так, исследование вероятности вступления Германии в войну с Либерией оказывается невозможным ввиду отсутствия повторяемости. По этой же причине невозможно определить вероятность того, что сорокалетний человек достигнет следующего возрастного этапа.

По Мизесу, ограничение объема понятия и соответственно уменьшение области приложений являются достоинством теории. Это согласуется с практикой построения успешных естественнонаучных теорий. Так, в механике одним из важнейших понятий является понятие работы, которое определяется как произведение силы на путь. Это понятие не отражает особенностей деятельности врача, юриста и представителей многих профессий.

Какими свойствами обладают данные, являющиеся прообразом объекта эмпирической статистической теории? Задолго до Мизеса было открыто, что разнообразные статистические характеристики, такие как средние, частоты, дисперсии, медианы и некоторые другие, относящиеся ко всей популяции данных, являются менее вариабельными, чем исходные данные. На графике частоты выпадения герба в зависимости от числа бросаний правильной монеты видно, что вначале частота хаотически изменяется. При достижении достаточно большого числа испытаний частота оказывается заключенной в узкую горизонтальную полосу, около числа 0.5. Начиная с определенного достигнутого значения частота практически не меняется.

Устойчивость частотной характеристики получила название закона устойчивости частот. Закон устойчивости частот имеет огромное значение для получения точных частотных характеристик, точного прогноза, для принятия решений на основе устойчивости частотных характеристик. С тем чтобы данные являлись прообразом объекта частотной теории, их частотные характеристики должны подчиняться закону устойчивости частот.

Вероятность в частотной концепции равна предельной частоте. Если в какой-либо области использования статистических методов с течением времени частотные характеристики не достигают предельных значений и(или) после достижения этих значений не становятся маловариабельными, то в этих областях знания невозможен точный прогноз. Успешная деятельность страховых обществ и игорных домов свидетельствует об устойчивости статистических характеристик таблиц смертности и азартных игр.

В отличие от закона стабильности частот, известного задолго до Мизеса, второй эмпирический закон, которому подчиняются частотные характеристики, получил название невозможности системы игры и был впервые сформулирован Мизесом. Согласно этому закону, при выбрасывании произвольным образом из бесконечной сходящейся частотной последовательности некоторых членов оставшаяся бесконечная часть исходной последовательности имеет тот же самый предел, что и в исходной последовательности.

Совокупность данных, подчиняющаяся закону невозможности системы игры, называется иррегулярной. Естественная иррегулярная последовательность получается в результате кидания монеты. Записывается результат бросания: герб или решка и номер эксперимента. Для простоты записи обозначим герб с помощью единицы, а лицевую часть нулем. Получим последовательность нулей и единиц.

Предположим, что структура последовательности неизвестна. Предлагается по произвольно выбранному алгоритму выбросить из исходной последовательности часть чисел. Например, выбрасывать каждое четное число, или каждое третье, или каждое число, впереди которого было два нуля, и т. д. Если в оставшейся последовательности частота единицы близка частоте в исходной последовательности, то последняя будет иррегулярной.

Статус закона невозможности системы игры в теории вероятностей аналогичен закону запрета вечного двигателя в механике. Правильность этого закона обоснована практикой азартных игр, крахом надежд фанатиков, тщетно пытавшихся обнаружить закономерность в случайной последовательности.

Не любая последовательность является иррегулярной. Простой алгоритм построения неиррегулярной последовательности был предложен Мизесом [11]. Пусть вдоль дороги поставлены столбы. После каждых девяти маленьких столбов десятый столб является большим. В исходной последовательности частота больших столбов рана 1/10. Предположим, что начиная с большого столба будем пропускать каждый второй, тогда в оставщейся последовательности частота больших столбов будет равняться 1/5. Частотная концепция ограничивается анализом иррегулярных последовательностей.

Объекты формальной эмпирической частотной теории представлены следующей триадой. В начале задается конечное множество S возможных исходов, по-другому его называют множеством меток:

$$S = (s_1, s_2, \ldots, s_k). \qquad (1)$$

Здесь все s_i являются различными метками. Вторая составляющая объекта теории – это бесконечная последовательность полученных результатов:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots). \qquad (2)$$

Каждое значение x_i совпадает со значением одной из меток. Посредством n_i обозначим встречаемость метки s_i . Если ограничиться первыми n членами последовательности (2), то m_i частоты встречаемости меток s_i примут следующие значения:

$$m_i = n_i / n \qquad (3)$$

Формальная экспликация закона устойчивости частот заключается в том, что при неограниченном продолжении последовательности (2) предельные значения частот встречаемости меток существуют для каждой метки. Эти предельные значения равны вероятностям. Для всех i = 1, k

$$p_i = \lim_{n\to\infty} n_i / n. \qquad (4)$$

Формальная экспликация закона невозможности системы игры заключается в том, что при выборе очередного элемента с номером n из последовательности (2) решение о том, включается ли этот элемент в формируемую подпоследовательность или он остается в исходной последовательности решается на основании значений $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и этого номера n. В общем виде выбор описывается системой функций:

$$f_1, f_2 (x_1), f_3 (x_1, x_2), f4 (x_1, x_2, x_3)\ldots . \qquad (5)$$

Каждая функция fi может принимать два значения, fn = 1 означает, что элемент с номером n включается в формируемую последовательность, а fn = 0 означает, что элемент с номером n не включается в формируемую последовательность.

Бесконечная последовательность данных, частотные характеристики которых удовлетворяют закону устойчивости частот и закону запрета системы игры, называется коллективом. В рамках частотной теории можно говорить о вероятности только по отношению к коллективу. Коллектив является объектом эмпирической частотной теории.

Методологические проблемы определения связи теории и эмпирических фактов оказываются решенными только после того, как определен коллектив и тем самым установлена связь теоретических терминов и эмпирических терминов. Задание коллектива предполагает задание распределения. Задачей исчисления теории вероятностей является определение распределений производных коллективов, полученных из исходного коллектива.

Эта задача была успешно решена с помощью четырех операций над исходным коллективом. Первая операция получила название выбора. Мизес следующим образом описывает эту операцию: «Элементы нового коллектива представляют из себя ряд элементов данного, образованный определенным выбором нумеров; признаки остаются неизменными; распределение в новом коллективе совпадает с распределением старого» [11, с. 50].

Вторая операция получила название комбинирования или смешивания. Эта операция предназначена для определения суммы вероятностей независимых событий. Все элементы исходного коллектива входят в производный коллектив. Новые признаки являются соединением признаков исходного коллектива. Например, исходный коллектив представляет распределение результатов, полученных при бросании шестигранной кости. Производный коллектив представляет собой распределение четных и нечетных исходов.

Третья операция называется разделением. Эта операция предназначена для вычисления условных вероятностей.

Последняя операция называется связыванием. Она моделирует создание нового коллектива из двух известных. Эта операция позволяет получить коллектив, содержащий члены двух известных коллективов, и совместные вероятности членов нового коллектива.

Критический анализ формализации Мизеса. В большой степени критика связана с использованием последовательностей счетной мощности для описания объекта эмпирической теории. Использование бесконечности при описании конечного числа данных для многих математиков, в том числе Колмогорова, представляется чересчур абстрактной идеализацией. По мнению Мизеса, использование бесконечно больших величин и предельных соотношений, связанных с бесконечностью, является не в большей степени абстрактной идеализацией, чем использование пределов с бесконечно малыми величинами в различных разделах физики.

Более того, в некоторых разделах физики, например в аэродинамике, применение пределов менее обосновано, чем в теории вероятностей [29; 32]. Предельные соотношения используются в аэродинамике для определения плотности вещества в точке P. Пусть малый объем вещества

δv, содержащий точку P, содержит массу δm. Тогда плотность вещества ρ в точке P, определяется следующим образом:

$$\rho = \lim_{\delta v \to 0} \delta m / \delta v. \quad (6)$$

Проблема заключается в том, что флюиды являются дискретным веществом, состоящим из молекул, а не непрерывным веществом. Если газообразное вещество заключено внутри пространства с размерами, сравнимыми со свободным пробегом молекулы до очередного столкновения, то в этом случае плотность вещества изменяется случайным образом.

Другая часть критических замечаний связана со следующими особенностями формального представления закона устойчивости частот.

Во-первых, закон устойчивости для объекта вероятностной теории формулируется с помощью обычной сходимости, принятой в классическом математическом анализе. С прагматических позиций обычная сходимость имеет бесспорное преимущество перед сходимостями в вероятностном смысле. Вероятностная сходимость конструируется путем добавления дополнительного теоретического термина к обычной сходимости. Эта особенность вероятностной сходимости будет нами проанализирована в разделе, посвященном закону больших чисел.

Во-вторых, бесконечная последовательность частотных характеристик задается не аналитическим путем, заданием закона последовательности, как это принято в математическом анализе, а конечным отрезком последовательности. Поэтому для конечного отрезка эмпирической последовательности существует бесконечное множество возможных теоретических законов. В философии науки эта ситуация получила название проблема недоопределенности теоретического знания [15].

Существует разнообразная критика второго эмпирического закона. Основные претензии к этому закону заключаются в том, что этот закон воплощает идею независимости разных частей данных друг от друга. Рейхенбах критиковал этот закон, так как не все данные являются независимыми и случайными, поэтому он неоправданно ограничивает границы применимости теории вероятностей. Рейхенбах, Поппер и некоторые другие философы пытались построить частотную теорию без этого закона [33; 34].

Чистые математики критиковали этот закон, так как он не является конструктивным. Субъективисты критикуют концепцию Мизеса из-за неприложимости ее для анализа сингулярных событий. В связи с этим рядом авторов была разработана концепция прямого вывода. Наиболее серьезный вклад в это направление был сделан Кайбергом и Леви [35; 36].

По нашему мнению, главное упущение Мизеса заключается не в том, что его концепция неприложима для вычисления сингулярностей. Мы считаем, что частотная концепция была разработана именно для описания вероятностей, относящихся к коллективу событий, а не к отдельному событию. Вероятность отдельного события просто не имеет смысла в рамках объективистской частотной теории.

Основное упущение заключается совсем в другом. А именно в том, что не разработана методология определения соответствия данных законам устойчивости частот и невозможности системы игры как для бесконечных последовательностей данных, так и для данных конечного объема. Происходит разрыв между частотной теорией, оперирующей коллективами, и статистической практикой, для которой Мизес не разработал принципы и конкретные алгоритмы о соответствии данных требованиям, предъявляемым к коллективам. При решении реальных практических задач, предполагающих анализ соответствия данных требованиям к коллективу, Мизесом применяется методология, не связанная с разработанной им частотной теорией.

Как на практике определяется соответствие данных коллективу – рассмотрено Мизесом при решении следующей задачи. Пусть исследуется вопрос о том, насколько часто буква «а» попадается в определенном латинском тексте, в частности «Bellum Gallicum» Цезаря. Для решения этой задачи выделяются первые двадцать групп текста по 100 букв каждая. Было получено, что в среднем в одной группе оказалось 8.7 представителей буквы «а». Далее определялся разброс среднего путем вычисления эмпирической дисперсии. Полученное значение дисперсии сравнивалось со значением дисперсии, полученным теоретическим путем. При близком совпадении дисперсий считается, что данные действительно образуют коллектив.

Рассмотренное решение не соответствует духу эмпиризма. Согласно теории Мизеса, необходимо определить устойчивость полученных результатов путем выделения части данных, и вычисления на этих данных статистических характеристик – среднего и дисперсии. Если результаты на этих частях данных близки друг другу и к результатам на всей совокупности данных, то это свидетельство эмпирической устойчивости.

Теория частотной статистики Мизеса является великолепным интеллектуальным достижением. Во-первых, эта теория является корректной математической дисциплиной. Во-вторых, в ней в явном виде сформулированы требования к объектам эмпирической теории. К теории Мизеса имеет место неоднозначное отношение среди теоретиков и практиков. Как сказал Тутубалин «с одной стороны, язык Мизеса мертв (для теоретиков), с другой стороны, на нем говорят прикладники» [37]. Действительно, прикладники оценили идею устойчивости. Но, для того чтобы частотные концепции стали эффективными в приложениях, необходима разработка методологии и конкретных алгоритмов для проверки адекватности данных требованиям коллектива.

§ 2. Частотная концепция вероятности Рейхенбаха

Для Рейхенбаха мотивацией для создания вероятностной частотной концепции явилось стремление формализовать понятие вероятностной причинной связи. Вероятностный вариант причинной зависимости являлся методологической основой для исследования проблемы времени. В логике принято описывать причинную связь с помощью импликации, поэтому вероятностная импликация легла в основу описания вероятностной причинности.

Теория вероятностей Рейхенбаха является прагматическим вариантом теории Мизеса. Во-первых, по Рейхенбаху, закон невозможности системы игры не имеет универсального значения. Этот закон означает независимость результатов наблюдения. Результаты наблюдений не обязательно являются независимыми. Во-вторых, Рейхенбах занимал более гибкую позицию по вопросу о возможности применения частотной теории для описания сингулярности.

Строгий смысл понятие вероятности имеет относительно всего коллектива данных, представляющих последовательность счетной мощности. Логически не обоснованным, но прагматически приемлемым является применение теории вероятностей для последовательностей конечной мощности и даже для определения вероятности сингулярного события.

Рейхенбах одним из первых сформулировал трудности, связанные с определением вероятности единичного события. Эта проблема получила название проблемы референтного класса. Суть проблемы заключается в том, что вероятность события зависит от того, какому множеству это событие принадлежит. Одно и то же событие может принадлежать бесконечному числу множеств. Возникает вопрос: как определить вероятность события, принадлежащего ряду множеств?

Рейхенбах предложил использовать минимальное множество, о котором имеется достоверная информация. В предельном случае референтное множество будет состоять из единственного события. Поэтому такой подход не соответствует духу частотной концепции.

Другая проблема заключается в том, что по интересующей исследователя совокупности признаков может не оказаться информации. Например, известна частота заболевания курящих людей определенного возраста и также известна частота заболевания курящих людей того же возраста. Интересующая исследователя группа состоит из бывших спортсменов, которые курят, но регулярно поддерживают себя физическими тренировками.

По этой категории людей может не оказаться достаточного количества данных. Поэтому возникает проблема, к какому известному референтному классу должны быть отнесены данные для определения вероятности заболевания до тех пор, пока не будут получена информация, относящаяся к искомому референтному классу.

В анализе вероятностных рассуждений Рейхенбахом использовано два подхода [33]. Основу первого подхода составляет расширение классической логики путем введения операции вероятностной импликации. Логический анализ является эффективным методом для экспликации понятий. Второй подход основан на анализе математического языка, используемого в теории вероятностей. Математический язык позволяет исследовать прагматические аспекты вероятностных рассуждений.

Как известно, в классической логике импликация часто интерпретируется как логическая связь. Аналогично, в вероятностной концепции для описания вероятностных причинных зависимостей используется понятие вероятностной импликации. Вероятностная импликация устанавливает связь между предварительно упорядоченными множествами.

Вероятностная импликация вводится формально с помощью системы аксиом. Как в названии, так и в символическом представлении вероятностной импликации подчеркивается связь с понятием классической импликации. Символически вероятностная импликация представлена с помощью символа обычной импликации, дополненного знаком вероятности, а именно:

$$\underset{p}{\supset}. \tag{1}$$

С помощью вероятностной импликации устанавливается вероятность, с которой связаны два упорядоченных множества. Пусть X и Y упорядоченные множества. Тогда вероятностная импликация между X и Y означает, что установлена степень вероятностной связи для каждого $x_i \in X$ и соответствующего $y_i \in Y$. Вероятностная импликация для множеств X и Y записывается следующим образом:

$$(i)\ (x_i \in X \underset{p}{\supset} y_i \in Y). \tag{2}$$

Иногда удобнее вероятностную импликацию представлять следующим образом:

$$(X \underset{p}{\supset} Y). \tag{3}$$

Последнее выражение с помощью общематематической нотации представляется следующим образом:

$$P(X, Y) = p. \tag{4}$$

Выражение (4) означает, что вероятность перехода от X к Y равна p.

Выражение (4) является примитивным символом, и определено только для фиксированного значения p. Поэтому понятия условной вероятности и вероятностной импликации не являются эквивалентными. Эквивалентность этих понятий имеет место исключительно для фиксированных множеств A и B и фиксированного числа p, означающего вероятность. С учетом этих ограничений связь условной вероятности и вероятностной импликации дается следующим определением:

$$[P(A, B) = p] = Df\,(A \underset{p}{\supset} B). \tag{5}$$

В отличие от Мизеса, Рейхенбах полагал необходимым дать аксиоматическую трактовку частотной теории вероятностей. В рейхенбаховской теории аксиоматическое определение вероятности предшествует частотной интерпретации, поэтому до описания частотной интерпретации проблема смысла и существования вероятностей учитывается формальным образом. В некоторых аксиомах существование вычисляемых вероятностей специально вводится с помощью квантора существования.

Существуют два подхода к проблеме существования вероятностей. Первый подход демонстрирует нежесткие требования к существованию. В этом подходе вероятность будет корректно определенной, если она получена на основе корректных вычислений, осуществленных над вероятностями событий, при этом предполагается, что существование последних было известно заранее. Согласно второму подходу, существование вероятности не может быть обосновано путем ссылки на вычисления над существующими вероятностями, существование обеспечивается введением оператора существования. Рейхенбах использует оба варианта существования.

Для экспликации аксиоматики Рейхенбаха полезно сравнить ее с хорошо известной аксиоматикой Колмогорова.

Аксиоматика Рейхенбаха. Аксиоматическая система состоит из пяти групп аксиом. Первая группа имеет название нормализации и состоит из следующих двух аксиом.

$$1)\ (\exists i)(x_i \in A) \wedge (A \underset{p}{\supset} B) \supset (p \geq 0); \tag{6}$$

$$2)\ (A \supset B) \supset (\exists p)\,(A \underset{p}{\supset} B) \wedge (p = \ ). \tag{7}$$

Первая аксиома утверждает, что вероятностная импликация определяется при условии, что первый импликант, представляющий собой множество А, является непустым множеством. Существование вводится с помощью квантора существования. В этой же аксиоме устанавливается, что вероятностная мера не может быть отрицательным числом.

Вторая аксиома устанавливает связь обычной импликации с вероятностной импликацией. Если между множествами А и В имеет место импликативная связь, то отсюда следует существование вероятностной импликативной связи единичной величины. Обратное утверждение для второй аксиомы не является верным. Другими словами, существование вероятностной импликации с единичной вероятностью не является основанием для того, чтобы имела место обычная, невероятностная импликация.

Убедимся вначале в том, что обратное утверждение не имеет место даже для более простого случая. Заменим в левой части выражения (7) множество В на дополнительное множество ¬В и соответственно $p = 1$ заменяется значением $p = 0$. В результате этого получим следующее выражение:

$$(A \supset \neg B) \supset (\exists p)\,(A \underset{p}{\supset} B) \wedge (p = 0). \tag{8}$$

Эта формула утверждает, что если происходит невозможное событие, то для события, обратного невозможному событию, существует вероятностная импликация нулевой величины.

Рассмотрим утверждение, обратное утверждению (8).

Получим

$$(\exists p)\,(A \underset{P}{\supset} B) \wedge (p = 0) \supset (A \supset \neg B) \tag{9}$$

Последнее утверждение означает, что нулевая вероятность для вероятностной импликации влечет появление невозможного события. Такая интерпретация неудовлетворительна. Рассмотрим следующий пример. Если протыкается иголкой лист бумаги, то вероятность проткнуть фиксированную точку равна нулю. Тем не менее нулевая вероятность события не означает, что это событие является невозможным. Значение второй аксиомы состоит в том, что она устанавливает связь классической импликации и вероятностной импликации.

Вторая группа аксиом носит название однозначности и состоит из одной аксиомы следующего вида:

$$(p \neq q) \supset [(A \underset{p}{\supset} B) \wedge (A \underset{q}{\supset} B) \equiv \neg(A)]. \tag{10}$$

На первый взгляд более простая формулировка этой аксиомы имеет следующий вид:

$$\neg((A \underset{p}{\supset} B) \wedge (A \underset{q}{\supset} B) \wedge (p \neq q)). \qquad (11)$$

Формулировка (11) означает невозможность одновременного выполнения трех событий. Покажем, что при некоторых p и q выражение (11) является истинным.

Для этого используем формулировку reductio ad absurdum:

$$(A \supset B) \wedge (A \supset \neg B) \equiv \neg(A). \qquad (12)$$

Используя связь вероятностной импликации и обычной импликации, для выражения (10) получаем

$$\neg(A) \supset (\exists p)\,(\exists q)\,(A \underset{p}{\supset} B) \wedge (A \underset{q}{\supset} B) \wedge (p = 1) \wedge (q = 0). \qquad (13)$$

Если $\neg(A)$ является истинным, то правая часть (13) тоже будет истинным выражением вопреки выражению (11).

Дополнительным аргументом в пользу корректности аксиомы однозначности говорит тот факт, что, опираясь на эту аксиому, выводимо следующее обоснованное утверждение:

$$(A \underset{p}{\supset} B) \wedge (A \underset{q}{\supset} B) \wedge (\exists i)\,(x_i \in A) \supset (p = q)$$

Третья группа аксиом носит название аксиомы аддитивности.

В этой группе две аксиомы.

1. $(A \underset{p}{\supset} B) \wedge (A \underset{q}{\supset} C) \wedge (A.B \supset \neg C) \supset (\exists r)\,(A \underset{r}{\supset} B \vee C) \wedge (r = p + q)$. (14)

В этой формулировке предполагается, что события B и C являются независимыми. Условие независимости B и C имеет вид

$$B \supset \neg C. \qquad (15)$$

В аксиоме для независимости используется выражение

$$A.B \supset \neg C,$$

являющееся следствием выражения (15).

Эта аксиома утверждает, что наличие двух вероятностных импликаций, которые являются независимыми импликандами, влечет вероятностную импликацию для суммы событий. Получается, что вероятностная импликация для суммы событий при условии, что эта импликация существует, равна сумме вероятностных импликаций для составляющих эту сумму событий. Перейдем ко второй аксиоме.

$$2.\ \underset{p}{(A \supset B)} \wedge \underset{r}{(A \supset B \vee C)} \wedge (A.B \supset \neg C) \supset (\exists q)\ \underset{q}{(A \supset C)} \wedge (q = r - q) \qquad (16)$$

Вторая аксиома выражает импликацию разности событий.

На основании этих аксиом выводится верхняя граница для вероятностной импликации:

$$P\,(A, B) \leq 1.$$

Четвертая и последняя группа аксиом носит название аксиомы умножения вероятностей.

В теории Рейхенбаха предложены два варианта аксиомы умножения.

Первый вариант реализуется двумя аксиомами:

$$1)\ \underset{p}{(A \supset B)} \wedge \underset{w}{(A \supset B.C)} \supset (\exists u)\ \underset{u}{(A.B \supset C)}.\ (u = w / p);$$

$$2)\ \underset{u}{(A.B \supset C)} \wedge \underset{w}{(A. \supset B.C)} \supset (\exists p)\underset{p}{(A \supset B)}.\ (p = w / u).$$

Используя обычную символику, принятую в теории вероятностей аксиому умножения можно представить в виде более удобном для вычислений:

$$P(A, B.C) = P(A,B)*P(A.B, C).$$

Смысл этой аксиомы заключается в следующем: вероятность одновременного появления двух событий в данном случае B и C при условии A равна вероятности одного события в данном случае B при условии A, умноженной на вероятность второго события в данном случае C при условии A.B.

Второй вариант аксиомы умножения имеет формулировку, весьма отличную от общепринятого варианта:

$$\underset{p}{(A \supset B)} \wedge \underset{u}{(A.B \supset C)} \supset (\exists w)\underset{w}{(A \supset B.C)}\ [w = f\,(p, u)].$$

В этом варианте утверждается лишь наличие связи между вероятностью события $A \supset B.C$ и вероятностями событий $A \supset B$ и $A.B \supset C$. Вид этой связи не задается, а устанавливается аналитически, что $w = p * u$.

Прежде чем переходить к сравнительному анализу аксиоматик Рейхенбаха и Колмогорова, напомним колмогоровскую аксиоматику.

Аксиоматика Колмогорова построена на теоретико-множественной основе. Пусть Ω множество элементов ω, которые называются элементарными событиями, а F множество подмножеств из Ω.

Аксиоматика Колмогорова для элементарной теории вероятностей содержится в четырех аксиомах:

1) F является алгеброй множеств;

2) каждому множеству A из F поставлено в соответствие неотрицательное действительное число P(A);

3. $P(\Omega) = 1$;

4. если A и B не пересекаются, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Совокупность объектов (Ω, F, P), удовлетворяющая перечисленным выше аксиомам, называется полем вероятностей.

В знаменитой книге Колмогорова основным понятием является безусловная вероятность, тогда как у Рейхенбаха основным понятием является условная вероятность. В аксиоматике Колмогорова максимальная вероятность непосредственно задается. У Рейхенбаха этот результат выводится из аксиомы аддитивности сложения. У Колмогорова каждое событие имеет определенную вероятность, но это специально не фиксируется. Рейхенбах вводит специальную аксиому однозначности для указания на однозначную определенность вероятности.

Как мы уже отмечали, Колмогоров огромное внимание уделял понятию независимости. В этом плане Колмогоров близок к Мизесу. Требование Мизеса о запрете системы игры, по сути, является требованием независимости.

Рейхенбах отказывается от требования независимости. С точки зрения чистой математики отказ от независимости просто невозможен, так как подавляющее число теорем доказано при условии, что независимость имеет место. С точки зрения прикладной математики этот отказ является реалистичным. Во-первых, независимость не всегда имеет место, во-вторых, не существует надежных методов проверки независимости. Гораздо важнее в приложениях убедиться в наличии устойчивости. Эта методологическая установка Рейхенбаха совпадает с современной методологией прикладной математики.

Современная методология применения математики в естественных науках начинается с Конта. По Конту, если некоторая переменная X имеет физический смысл и значения этой переменной измерены с заданной точностью, то существование этой величины является обоснованным. Далее, пусть установлена функциональная связь между переменными X и Y, тогда значения величины Y определяются математически. При этих условиях для Конта существование Y не вызывает сомнений [38]. По сравнению с Контом Рейхенбах занимает более радикальную установку на проблему существования характеристик изучаемых объектов.

Рейхенбах отвергает обоснование существования статистических характеристик, полученных с помощью математического аппарата, примененного к другим характеристикам, даже если существование последних было доказано ранее. Существование не может быть обосновано логическим путем. Критерий существования имеет эмпирический характер. Жесткая установка к условиям существования теоретических объектов является вкладом Рейхенбаха в формализованном описании проблемы объекта эмпирической теории. От фундаментальной теории Рейхенбаха перейдем к анализу нефундаментальных теорий.

§ 3. Статистическая теория Фишера

Теорию Фишера обычно относят к эмпирическим частотным теориям. У нас нет информации о том, как Фишер соотносил свою теорию с эмпирическими теориями. Для того чтобы решить проблему идентификации теории Фишера, необходимо дать определение эмпирической теории. Для того чтобы выделить характерные особенности эмпирических частотных теорий, обратимся к общепризнанным частотным эмпирическим теориям.

Работы Мизеса бесспорно относятся к области частотных объективистских эмпирических теорий. Теория Мизеса частотная потому, что объектом теории являются частотные последовательности, которые получены в результате проведения большого числа экспериментов и удовлетворяют двум эмпирическим законам. В соответствии с частотной концепцией вероятность является агрегированной характеристикой и относится ко всему коллективу.

Гиллес предлагает считать теорию эмпирической, если формально или неформально устанавливается связь теоретических терминов и эмпирических терминов. Это слишком либеральное требование. Согласно этому эмпириками являются Мизес, Рейхенбах, Колмогоров, Дуб и некоторые другие. Не все из этого списка являются эмпириками, в частности это относится к Дубу.

Колмогоров писал, что по отношению к связи теории вероятностей и опыта он придерживается позиции Мизеса. Более определенно это формулируется в принципе практической достоверности. Этот принцип содержит два положения. При неограниченном продолжении эксперимента частота и вероятность делаются неограниченно близкими друг к другу. В единственном проведенном эксперименте событие с низкой вероятностью является физически невозможным.

Вторую позицию трудно считать эмпирической. Почему эмпирик требует многократного повторения экспериментов? Потому что не существует глубоких теоретических знаний об изучаемом объекте. В отсутствие теорий приходится прибегать к эксперименту. Для эмпирика реальностью обладают данные. Теоретические объекты являются представителями эмпирических объектов.

Мы полагаем, что теория является эмпирической, если в ней устанавливается связь теоретических терминов через эмпирические и предложены методологические принципы определения теоретических терминов в практике применения теории к реальным данным. Естественно, что если наряду с методологическими принципами будут предложены и алгоритмы для определения существования объекта эмпирической теории, то такая теория будет идеальной для корректных приложений.

Фишера обычно относят к эмпирикам – так его оценивают в работах Майо [15]. Для прояснения отношения Фишера к эмпиризму необходимо исследовать философские основания Фишера. Не вызывает сомнения значимость исследования философских оснований Фишера, так как его влияние на современную статистику трудно переоценить.

Фишер ввел в практику научных исследований принцип максимального правдоподобия и одноименный метод оценивания параметров, основанный на принципе максимального правдоподобия [39]. Метод максимального правдоподобия является наиболее общим методом оценивания параметров.

Принцип максимального правдоподобия основан на следующем соображении. Если неизвестны вероятностные характеристики результатов эксперимента, то предполагается, что совместная плотность имеющих данных должна быть максимальной. В определенном смысле это вероятностный детерминизм. Произошло то, что должно было произойти.

Метод максимально правдоподобия предполагает, что результаты экспериментов являются независимыми. Если точно известна модель экспериментов, то метод максимального правдоподобия дает точные оценки параметров. При небольших отклонениях реальных данных от модели метод не гарантирует, что статистические оценки будут незначительно отклоняться от искомых параметров. Другими словами, методы не являются устойчивыми по отношению даже к незначительным отклонениям реальных данных от данных точно соответствующих модели.

Влияние Фишера трудно переоценить. Английский статистик обосновал критерии качества оценок статистических параметров, такие как состоятельность и эффективность. Фишер является основателем дисперсионного анализа, который применяется для сравнения средних величин для произвольного числа совокупностей. Он ввел в практику научных исследований понятие фидуциальной вероятности. Фишер является создателем концепции рандомизации. И это далеко неполный перечень его достижений [39; 40].

После Фишера математическая статистика стала состоятельной математической дисциплиной, а так как статистика широко применяется, то можно говорить о влиянии Фишера не только на развитие статистики, но и влиянии на науку в целом.

Несколько слов о Фишере как о личности. Несмотря на общепризнанный вклад в развитие статистики, Фишер не стал профессором статистики. У него был тяжелый характер и плохие отношения со многими знаменитыми статистиками, в частности с Э. Пирсоном, сыном известного философа и статистика К. Пирсона. Фишер много занимался приложениями статистики к биологии, и в частности к генетике, и в итоге он стал профессором, но не статистики, а генетики.

Несмотря на полученное звание профессора генетики, Фишер, прежде всего, был блестящим математиком. Он обнаружил и исправил ошибки во многих статистических критериях, созданных его предшественниками, в частности критерий о сравнении средних Стьюдента, а также подкорректировал знаменитый критерий К. Пирсона – хи-квадрат, определяющий соответствие данных вероятностному распределению [41].

Как методолог статистики, он не был столь великим, как профессиональный математик. Он был выдающимся теоретиком в области статистики. Теоретик-статистик – это, прежде всего, профессионал в чистой, математической статистике. Безусловно, теоретики-статистики иногда занимаются планированием конкретных статистических экспериментов, конкретными расчетами и им приходится учитывать гносеологические особенности формализуемого знания, и тогда теоретик выполняет функции прикладного статистика и методолога в области статистики.

Между теоретиками в области статистики, с одной стороны, и методологами в области прикладной статистики, с другой стороны, существуют принципиальные расхождения в оценках одних и тех же статистических теорий [42]. Так, у чистых математиков фишеровская теория статистики является популярной, ибо эта теория логически корректна. Методологи и прикладники подвергают жесткой критике практическую значимость фишеровской статистики. В последние годы методология Фишера критикуется наиболее часто в связи принципом рандомизации. В соответствии со стандартами доказательной медицины все проводимые эксперименты в медицине должны быть обязательно рандомизированными.

Отношение Фишера к статистике сформулировано им в работе [4]. Он пишет: «Математическая статистика относится к прикладной математике. Математическая статистика – это учение о вариабельности. Методология применения математической статистики заключается в следующем. По данным рисуем гистограмму. На основании полученного графика формулируем гипотезу о теоретическом распределении данных. Далее с помощью критериев согласия проверяется гипотеза о соответствии данных гипотетическому распределению. Если параметры гипотетического распределения неизвестны, то они оцениваются по выборке. В результате практически вся информация об объекте будет получена».

В данном пассаже прямо не говорится об объекте статистической теории. Один из подходов к определению понятия объекта в математике предполагает использование понятия базового свойства. Свойство называется базовым, если оно удовлетворяет двум условиям. Во-первых, наличие этого свойства логически не выводимо из наличия других свойств, в том числе других базовых свойств. Во-вторых, практически все фундаментальные результаты в математической дисциплине опираются на эти свойства.

В теории вероятностей и математической статистике такими свойствами являются распределение вероятностей и в меньшей степени независимость. Подавляющее большинство результатов в этих областях относится к случайным величинам с известным полностью распределением или до параметров этого распределения, кроме того, они обычно предполагаются независимыми.

Теория, предоставляющая методологические принципы для обоснованного определения базовых свойств на основе эмпирических прообразов этих базовых свойств, может считаться эмпирической теорией. Эта теория будет адекватной приложениям, если наряду с методологией определения базовых средств будут предоставлены алгоритмические средства для определения базовых свойств.

Для уточнения философских позиций Фишера предлагается анализ осуществленных им значимых новаций в статистику. Таковыми бесспорно являются концепция рандомизации, проверка гипотез и методология оценивания параметров.

Рандомизация по Фишеру. Рандомизация заключается в специальном привнесении случайности в планирование, проведение эксперимента и анализ результатов эксперимента. Бесспорно, принцип рандомизации является новаторской идеей, до Фишера случайность была персоной non grata в науке.

Применение рандомизации связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, с особенностями самой теории статистических методов, во-вторых, с особенностями объектов приложения статистической теории.

Начнем с особенностей статистической теории. В аналитических разделах статистики, таких как оценивание параметров и проверка гипотез, предполагается, что данные сформированы случайным образом.

1. Понятие доверительного интервала, играющее первостепенную роль в статистике, построено на допущении, что концы интервала случайные числа.

2. Фиксируемый уровень значимости при проверке гипотез будет оправдан, если методы проверки гипотез применяются для выборки, полу-

ченной с помощью рандомизации. В противном случае уровень значимости неизбежно будет уменьшен.

Характерной чертой статистического метода является редуцирование систематической ошибки к случайной ошибке. В фишеровской концепции применяют два различных методологических принципа. Первый принцип использует идею повторяемости эксперимента. Эксперимент согласно критерию состоятельности повторяется бесконечное число раз. В результате получаются оценки с минимальной дисперсией. Второй прием имеет большое значение для исследований, где повторяемость эксперимента невозможна. В этом подходе используется идея рандомизации.

Рандомизация применяется по отношению к экспериментальным единицам и способам обработки. Экспериментальная единица является наименьшей частью экспериментального материала [43]. Под способом обработки понимается процедура, применяемая к экспериментальной единице. Как справедливо отмечают авторы, трудно дать формальное определение понятия экспериментальной единицы [Там же].

Проще привести примеры экспериментальных единиц. В медико-биологических исследованиях экспериментальными единицами являются отдельные подопытные животные, пациенты, группы пациентов. Они подвергаются различным обработкам. Обработки заключаются в применении различных способов лечения, режима сна, диеты и т. д.

Существует принципиальное отличие в экспериментальных единицах в технических науках, с одной стороны, и в науках о живом и социальных науках, с другой стороны. В первом случае экспериментальные единицы изготовлены по стандарту и являются идентичными. По отношению к ним можно говорить, что эксперименты осуществляются в одинаковых условиях.

Во втором случае подбор группы однородных объектов является непреодолимой проблемой. Предположим, что ставится эксперимент по определению влияния курения на здоровье человека. Курильщики, бывшие спортсмены, продолжающие заниматься спортом или занимающиеся физическим трудом и одновременно курящие, могут оказаться более здоровыми людьми, чем игнорирующие здоровый образ жизни некурящие люди.

В простейших опытах исследуется один фактор, все остальные являются неизменными. Для анализа этого фактора все объекты делятся на две группы, состоящие из идентичных объектов и одинаковые по объему. Объекты одной группы подвергают воздействию. Все остальные факторы являются контролируемыми. Об эффективности воздействия судят по среднему различию исследуемого фактора в выделенных группах.

Однофакторные модели при условии контроля других фоновых факторов оказались неадекватными для использования в науках о человеке, экономике и других социальных дисциплинах. Во-первых, объекты в области социальных наук и в науках о человеке не являются идентичными, поэтому выделение даже приблизительно однородных групп не всегда осуществимо. Во-вторых, социальные явления являются сложными, зависящими от многих факторов, поэтому полный контроль над фоновыми условиями не является возможным.

Рандомизация важна для анализа неоднородных данных. В науках о человеке и экономических дисциплинах объекты исследования не могут составлять однородную выборку. Невозможность контроля фоновых условий явилась для Фишера отправной точкой для создания концепции рандомизации. За счет случайного назначения способов обработки экспериментальным единицам удается свести систематическую ошибку, вызванную неполным знанием фоновых условий исследуемых объектов и принципиальной неоднородностью выборок к случайной ошибке.

Предполагается, что рандомизация предшествует любому виду статистического анализа – регрессионного, дисперсионного, корреляционного и т. д. Метод рандомизации был введен в статистическую практику в связи с так называемой задачей о даме, дегустирующей чай [16]. Английская дама утверждает, якобы она способна отличить, что вначале налито в чашку – чай или молоко. Для определения дегустаторских способностей предложено восемь чашек, в четыре чашки вначале налили молоко, в другие – налили чай. Перед дамой стоит задача разделения восьми чашек на две группы.

Для определения надежности статистического решения используется понятие ошибки первого рода. Ошибка первого рода любого статистического испытания заключается в том, что основную гипотезу отклонили в то время, когда она является правильной. В данном случае основная гипотеза состоит в том, что дама обладает дегустаторскими способностями. Обычно для ошибки первого рода выбирается значение 0.05. В данном случае ошибка первого рода равна 1/70, что меньше 0.05. Поэтому, безошибочное решение задачи имеет малую вероятность.

Другая, более мягкая проверка способностей заключается в следующей процедуре. Предлагается определить для каждой пары чашек, в какой из них в начале налито молоко, а в какой – чай. Для восьми чашек вероятность дать случайно правильный ответ равна 1/16. Для того чтобы уменьшить ошибку первого рода, необходимо увеличить число экспериментов. Для шести экспериментов ошибка первого рода 1/64.

В рассматриваемой задаче элемент случайности вводится в эксперимент не для получения выборки (отбора экспериментальных единиц). Тем не менее случайность играет самую существенную роль, так как объекты для распознавания подаются обязательно в случайном порядке.

Принцип рандомизации нивелирует неоднородные различия в группах, является предпосылкой корректного применения статистической теории, особенно в случае отклонения данных от предполагаемой модели данных.

Считается, что рандомизация снижает остроту проблемы контроля регулируемых фоновых факторов и даже неизвестных фоновых факторов. Кроме того, рандомизация является барьером субъективности экспериментатора, проявляющейся в бессознательном выборе в экспериментальную группу наиболее подходящих для подтверждения теории образцов. Разнообразные достоинства метода рандомизации делают его привлекательным.

Но все стоит усилий, затрат, в том числе и денежных. Естественно, проще исследовать технологический процесс сначала при одном температурном режиме, потом при другом. Назначение температуры случайным образом предполагает резкие изменения, что по технологическим причинам может оказаться сложным или даже невыполнимым. Если чистая неограниченная рандомизация невозможна, то проводят частичную, ограниченную рандомизацию.

Наибольшую популярность принцип рандомизации имеет в медицине. В полной мере это относится к терапии. В последние годы принцип рандомизации получил нормативный статус в планировании и проведении экспериментальных исследований в связи с появлением новой научной дисциплины под названием evidence based medicine. На русском языке этот раздел знания известен под названием «доказательная медицина». Только рандомизированные эксперименты признаются медицинским сообществом.

До введения в практику клинических исследований принципа рандомизации в медицине было получено множество обоснованных результатов. Возникает вопрос, в каких случаях допустимо использовать результаты, полученные не основе рандомизированных экспериментов? Глубокий эпистемологический анализ адекватности принципа рандомизации в медицине дан Уорраллом [17].

В итоге он следующим образом формулирует возможные исключения из правил:

1. За пределами мягких разделов медицины применение принципа рандомизации не является обязательным.

2. Даже в терапии не является необходимым проверять результаты, полученные не на рандомизированной основе, если неприменение этих результатов ведет к фатальному исходу.

3. В терапии результаты, полученные суперквалифицированной командой без привлечения рандомизированных экспериментов и принятые единодушно, заслуживают доверия.

4. Для терапии рандомизация является золотым стандартом. В других разделах медицины результаты нерандомизированных исследований не отвергаются, но, для того чтобы они стали полностью легитимными, необходимо провести дополнительные исследования уже на основе принципа рандомизации.

Какие существуют основания для предпочтения рандомизации другим способам контроля фоновых условий и другим методам формирования контрольной и экспериментальной групп? Наиболее сильный аргумент в пользу рандомизации заключается в том, что при повторе с помощью рандомизации, ранее проведенных успешных нерандомизированных экспериментов эффективность исследуемых методов лечения и изучаемых лечебных препаратов подтверждается в существенно меньшей степени.

Это положение дел объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, тем, что исследователи отбирают в экспериментальную группу таких пациентов, которым в максимальной степени адекватна предлагаемая методика лечения. Поэтому при отборе с помощью рандомизации эффективность лечения подтверждается в меньшей степени. Во-вторых, эффект нерандомизированных экспериментов объясняется психологическими причинами. Пациенты настроены на успех, они доверяют врачу.

Применение математических моделей в медицине связано с этическими проблемами. Методологические вопросы корректного построения и применения математических моделей оказываются связанными с этическими проблемами, потому что на основе этих моделей принимают решения, о пригодности методов лечения человека. В работе [17] приведен пример, иллюстрирующий связь методологических проблем статистического анализа и этических проблем в медицине.

Анализ таблиц смертности младенцев показывает, что в огромном числе случаев причиной смерти является постоянное легочное избыточное кровяное давление. В работах американских ученых был найден новый метод лечения. На протяжении ряда лет было показано, что новый подход на 20 % эффективнее традиционных методов лечения. Не было известно ни одной публикации против нового способа лечения.

Тем не менее новый подход не сразу получил признание и применялся наряду с традиционными методами. Проблема заключалась в том, что создатели нового метода лечения проводили исследования без применения рандомизированных экспериментов. Поэтому было принято решение о сравнении эффективности лечений на основе рандомизированных экспериментов. Такие эксперименты были проведены, и они доказали преимущество нового подхода. Эти эксперименты унесли жизни нескольких детей, смерти новорожденных были напрасными, потому, что большая эффективность нового способа лечения была очевидной.

Проблема объекта у Фишера. Понятие объекта в теории Фишера не формулируется явным образом. Анализ оснований подходов Фишера с помощью понятия базового свойства показывает, что объекты теории Фишера – это независимые случайные величины, имеющие априори теоретическое распределение. Задача статистика заключается в определении этого распределения и его параметров некоторым оптимальным образом. Рандомизация предоставляет некоторые разумные основания для решения различных задач на основании проведения экспериментов с ограниченным числом данных. Тем не менее рандомизация не заменяет полномасштабные исследования, направленные на получение объективных точных статистических оценок. Таким образом, принцип рандомизации не обеспечивает в полной мере решение проблемы объекта эмпирической теории.

Проверка одной гипотезы в концепции Фишера. Может ли статистическая проверка гипотез являться фундаментом эмпиризма?

По нашему мнению, необходимость в статистической проверке возникает не в каждом исследовании, проводимом в рамках эмпиризма. Необходимость сравнительного анализа по степени обоснованности нескольких гипотез может появиться на завершающих этапах экспериментального исследования.

На первом этапе осуществляются наблюдения интересующего явления, активные эксперименты, связанные с конструированием интересующих феноменов. Критерием успешного эксперимента является получение устойчивых результатов измерений.

Применение математики относится к последующим этапам. Математика используется как инструмент для исследования связи величин, измеренных с требуемой точностью, и неизвестных искомых параметров. Если удается определить вид связи, то измерения и эксперименты будут заменены вычислениями.

Проверка одной гипотезы о соответствии данных некоторому теоретическому распределению изучается в разделе критериев согласия. В качестве критерия проверки одной гипотезы был выбран критерий Пирсона хи-квадрат, потому что он является наиболее универсальным критерием, адекватным для проверки соответствия данных как дискретным, так и непрерывным распределениям.

Проверка гипотез – это один из наиболее разработанных теоретических разделов математической статистики. Название «проверка гипотез» в концепциях Фишера и Неймана–Пирсона не является вполне корректным. Сути дела более соответствует название фальсификации гипотез. Действительно, результатом любой решаемой задачи является либо принятие гипотезы, либо отвержение гипотезы, другими словами, ее фальсификация.

Предшественниками Фишера в создании раздела проверки гипотез являлись статистик Госсет, публиковавшийся под фамилией Стьюдент, и философ, биолог и специалист в области прикладной математики К. Пирсон.

По Фишеру, статистика как наука в целом и математическая статистика как часть этой науки – это научная дисциплина, занимающаяся анализом вариации данных. В современной математической статистике предлагается аналитический анализ вариабельности.

До Стьюдента процесс анализа вариабельности с теоретических позиций был бесконечным [44]. По данным определяли среднюю величину. Далее, например, с помощью среднего квадратического отклонения определяли вариабельность среднего квадратического отклонения. Следующим шагом было с помощью третьей статистики определение вариабельности второй статистки и т. д. до бесконечности. Конечно, практически статистики ограничивались анализом третьей, а то и второй статистики. Но процесс остановки не был обоснован теоретически.

Впервые созданная Стьюдентом методология статистического вывода обосновала ненужность бесконечной лестницы, ведущей к оцениванию изменчивости результатов. Стьюдент придумал критерий, позволяющий проверять гипотезы о равенстве эмпирического среднего и гипотетической средней генеральной совокупности при условии, что данные подчиняются нормальному распределению. Предложенная Стьюдентом критериальная статистика такова:

$$t = (x - \mu) / (\sigma \sqrt{n}) \text{ б.} \tag{1}$$

Здесь x – эмпирическое среднее; μ – среднее генеральной совокупности; σ – среднее квадратическое отклонение; n – объем выборки. Распределение статистики Стьюдента затабулировано. Это распределение зависит только от числа степеней свободы. Число степеней свободы равно объему выборки минус один и минус число оцениваемых по выборке параметров. Распределение Стьюдента используется для проверки гипотезы о том, значимо ли отличается найденное по выборке среднее от гипотетического среднего. Если правая часть выражения (1) больше значения t, найденного по таблице распределения Стьюдента, то гипотеза о равенстве среднего эмпирического и гипотетического среднего отвергается [Там же, с. 236].

Область использования критерия Стьюдента ограничена данными, подчиняющимися нормальному распределению. Первый известный универсальный критерий проверки гипотез, адекватный как для дискретных, так и для непрерывных распределений, был создан К. Пирсоном в 1900 г., оставившим яркий след в трех областях знания. Он был известным генетиком-популяционистом, одним из основателей биостатистики и весьма значительным философом. В области философии известна его монография под названием «Грамматика науки». Пирсон был настоящим сциентистом, он полагал, что прогресс в области науки приведет к уменьшению роли всех других социальных институтов, в частности религии. Пирсон был позитивистом и эмпириком.

Созданный Пирсоном критерий относится к так называемым критериям согласия, предназначенным для проверки гипотез об адекватности данных различным теоретическим распределениям. После критерия Пирсона появилось множество критериев согласия, в том числе критерий Колмогорова–Смирнова, критерий Мизеса, ω^2, Реньи и многие другие. Тем не менее критерий Пирсона χ^2 до сих пор является очень популярным. Он часто используется в прикладных исследованиях. Это связано с его универсальностью и простотой в применении. В наиболее законченном виде критерий Пирсона был сформулирован Фишером.

Фальсификация статистических гипотез вызывает серьезные методологические проблемы. Легко предложить правило фальсификации для детерминистского суждения, например такого: «Все A являются B». Если какое-то значение A, например A_0, не является B, то тем самым гипотеза опровергнута.

В математической статистике фальсификация гипотез построена на использовании идеи Коарнота считать маловероятные события как физически невозможные [45]. Использование этого предложения приводит двум вопросам:

1. Какова вероятность события, позволяющая считать данное событие физически невозможным?

2. Как построить конструктивный критерий определения физически невозможного события независимо от фактической величины вероятности этого события?

Оба вопроса оказываются проблематичными. Сложность решения первого связана с тем, что в разных научных дисциплинах известны реализации событий с ничтожными вероятностями. В качестве такой вероятности Воткинс предлагал брать вероятность порядка [46]:

$$10^{**}(10^{12}). \qquad (2)$$

В математической генетике известны вероятности меньшего порядка. Так, на основании законов Менделя было получено совместное распределение генов 5 млрд жителей планеты. Эта вероятность оказалась меньше величины (2).

В статистике используется модификация предложения Коорнота. В качестве невозможного события принимается событие, имеющее низкую вероятность относительно вероятностей всех возможных событий.

Для того чтобы проверить гипотезу о соответствии данных некоторому закону распределения, необходимо формально описать разность между гипотетическим и эмпирическим распределениями. Эта случайная величина называется статистикой критерия. Для применения аналитического аппарата проверки гипотез необходимо установить закон распределения статистики критерия. Следующий шаг состоит в назначении максимально возможной ошибки фальсификации гипотез. Эту ошибку называют ошибкой первого рода. Принятое обозначение – α. Как правило, получить аналитическое описание распределения статистики критерия не удается. Во многих случаях получены предельные распределения критериальных статистик. Предельное распределение для многих критериальных статистик оказывается известным, хорошо изученным распределением. Решающий шаг проверки гипотез формализуется следующим образом. Если вероятность наблюдаемого значения статистки меньше или равна вероятности допустимой ошибки, то говорят, что проверяемая гипотеза отвергается на уровне значимости α. В противном случае гипотеза не отвергается, а, следовательно, принимается на этом уровне значимости.

Для того чтобы абстрактная схема получила конкретное воплощение, продолжим критический анализ проверки гипотез на примере критерия χ^2. В критерии χ^2 предполагается, что данные разбиты на интервалы. Предположим, что данные разбиты на k интервалов и в каждый интервал попало v_i результатов эксперимента, $i = 1, k$. Общее число данных $n = \sum v_i$.

Пусть p_i – вероятность попадания случайной величины (имеющей распределение, на соответствие которому осуществляется проверка) в *i*-й интервал.

Статистика критерия, так называемая статистика $\chi^2_{кр}$, имеет следующий вид:

$$\chi^2_{кр} = \sum(v_i - np_i)^2 / np_i. \tag{3}$$

В идейном плане статистика критерия формализует разницу между эмпирическими частотами и теоретическими вероятностями. Если объем данных стремится к бесконечности, то статистика критерия сходится к так называемому распределению χ^2.

Решающий шаг в фальсификации гипотезы формулируется следующим образом.

Если $P\{\chi^2 \geq \chi^2_{кр}\} \leq \alpha$, то гипотеза о соответствии данных отвергается на уровне значимости α.

Таким образом, если суммы вероятностей для данного и больших отклонений гипотетического распределения и эмпирического распределения менее вероятны, чем уровень значимости, то гипотеза отклоняется на этом уровне значимости.

Критический анализ обоснованности критерия Пирсона хи-квадрат. Каковы рациональные основания для отвержения гипотезы? Обычно приводят следующие аргументы:

1. При условии, что гипотеза верна, произошло событие, которое имело мало шансов произойти. В силу принципа практической достоверности в единственном проведенном эксперименте маловероятное событие невозможно.

2. Если проводить эксперимент долго, то мы будем ошибаться редко, процент ошибок меньше или равен максимальной вероятности ошибок α.

На самом деле, маловероятное событие может произойти когда угодно, в том числе в первом же проведенном эксперименте. Логических оснований для опровержения гипотезы по первому аргументу нет. Второй аргумент Фишер отвергал. Он полагал, что из вероятности P любого события логически не следует, что событие этого типа произойдет когда-либо в течение всей жизни.

Каковы основания для принятия гипотезы при условии, что гипотеза верна и произошло событие с вероятностью большей, чем критическая вероятность. Пусть в первом проведенном эксперименте произошло событие с очень высокой вероятностью. Тогда гипотезу надо принимать. Опять логических оснований для принятия гипотезы нет. Из проведенного эксперимента не следует воспроизводимость результатов в следующем эксперименте. Прагматические и операциональные проблемы проверки гипотез выявляются при исследовании алгоритмических особенностей критерия хи-квадрат.

Применение критерия предполагает разбиение данных на интервалы. В связи с этим возникают следующие вопросы:

1. Какова процедура выделения интервалов?

2. Каково минимальное число интервалов?

3. Сколько данных должно быть в интервале?

4. Какое минимальное число данных необходимо для применения критерия?

Не существует унифицированного подхода к построению интервалов. В литературе, посвященной рекомендациям по применению критерия, предлагают два варианта разбиения данных:

а) разбиение данных на отрезки одинаковой длины;

б) разбиение данных на отрезки, вероятность попадания в которые случайной величины, имеющей гипотетический закон распределения, одна и та же для всех интервалов.

Глубоких оснований для этих принципов разбиения нет. Недавно предложен третий вариант разбиения. Этот подход основан на максимизации мощности критерия проверки гипотез для близких альтернатив [47].

Расхождение рекомендаций имеет следующие причины. Во-первых, при малых объемах данных распределение статистики хи-квадрат существенно отличается от распределения хи-квадрат. Во-вторых, для разных распределений распределение статистики сходится к предельному распределению с разной скоростью.

Основные недостатки критерия Пирсона. 1. Логические основания фальсификации и подтверждения гипотез трудно признать обоснованными. Маловероятные события являются возможными. Гипотеза является основательно фальсифицированной, если частота наблюдаемого события отличается от теоретической вероятности события для много кратно проведенных экспериментов.

2. Не предлагается унифицированных способов группирования данных. Разные разбиения данных могут приводить к разным результатам. При одном разбиении гипотеза отвергается, а при другом – принимается (такого рода пример дан в работе [46]), поэтому данный критерий не может считаться объективным.

3. Не известно аналитическое представление распределения статистики критерия. Предельное распределение статистики критерия отличается от распределения хи-квадрат. Это отличие в ряде ситуаций может приводить к грубым ошибкам.

4. В работе [47] показано, что в случае оценки параметров распределений поведение предельного распределения может существенно отличаться от поведения статистики критерия.

Легковесное выдвижение гипотез не может быть компенсировано основательной проверкой правильности выдвинутой гипотезы. Проверка предположений, лежащих в основе критериев согласия, сложнее, чем непосредственное получение статистических решений на основе эксперимента. Проверка гипотез не может заменить эмпирическую методологию получения устойчивых результатов с помощью экспериментов.

Методология оценки статистических параметров. Проверка гипотез о соответствии данных теоретическим распределениям и оценивание статистических параметров относятся к параметрическому разделу статистики. Проблема оценки параметров может рассматриваться как самостоятельная проблема или как часть общей проблемы проверки гипотез. В общем случае кроме задачи оценивания параметров решается задача проверки соответствия распределения с найденными параметрами, имеющимся в распоряжении данным. Проблема оценки параметров является классическим направлением статистики. По нашему мнению, необходим критический анализ этого раздела статистики с точки зрения современных требований к эффективности математики.

В любом случае в задачах параметрического раздела предполагается, что задано вероятностное распределение исследуемых явлений. Некоторые параметры распределения неизвестны. Декларируется «оптимальное» определение искомых параметров [10].

Как известно, в вероятностном распределении содержится вся возможная информация об объектах вероятностной природы, считается, что распределение является вероятностным законом природы. Для анализа адекватности проблемы оценивания параметров практике естественных наук полезно вначале рассмотреть аналогичную детерминистскую постановку задачи.

Рассуждая по аналогии, предположим, что мы каким-то образом в существенной степени открыли закон природы, например второй закон Ньютона. Мы знаем, что ускорение пропорционально приложенной силе, но коэффициент пропорциональности точно неизвестен. В разделе параметрической статистики предлагаются универсальные методы оценивания параметров «оптимальным образом». Не вызывает сомнения, что предположение о существовании универсальных «оптимальных» теоретических способов оценки неизвестного коэффициента в законе Ньютона и в других законах будет единодушно отклонено специалистами в области физики.

Перейдем от детерминистских аналогий к собственно вероятностной проблематике.

Параметрами часто являются моменты распределений. Например, параметрами нормального распределения являются первый и второй моменты – это соответственно математическое ожидание и дисперсия. Известна теорема о том, что знание всех моментов распределения не позволяет восстановить это распределение. Другими словами, в распределении содержится в огромной степени больше информации, чем в неизвестных параметрах. Весьма сложная теория оценивания параметров в итоге немного добавляет дополнительной информации к уже имеющейся. Огромная разница в информативности распределения и параметров дают основание для вопросов эпистемологического характера. Каким образом априори стало известно распределение? Является ли рациональным использовать закон распределения для оценивания неизвестного параметра, если вначале придется решить более сложную задачу по определению типа распределения данных?

Сформулируем некоторые аргументы против адекватности постановки задач в параметрическом разделе статистики для технических приложений. Во-первых, в распределении содержится максимально возможная информация об изучаемом процессе и знание распределения исследуемого процесса априори является нетипичной ситуацией. Во-вторых, часто исследователь не имеет достаточно данных для проверки гипотезы о типе распределения. В-третьих, параметры распределения, особенно на первой стадии исследования, например средние дисперсии и др., представляют самостоятельный интерес, а не как параметры распределения. В-четвертых, представляется нерациональным для решения весьма простой задачи определения среднего предварительно решать гораздо более трудную проблему поиска распределения. От анализа адекватности постановки задач в параметрическом анализе практическим приложениям перейдем к анализу обоснованности основных положений теории оценивания.

Анализ оснований оценки параметров. Наиболее общим методом оценивания параметров является метод максимального правдоподобия (ММП). ММП предполагает, что данные могут быть описаны множеством независимых случайных величин. Методологической основой метода ММП является принцип максимального правдоподобия.

В рамках метода ММП не исследованы многие вопросы, без решения которых адекватность применения метода на практике не является обоснованной. Наиболее важными из них являются следующие:

1. Почему функция правдоподобия, построенная на единственной выборке примет максимальное значение?

2. Как изменится величина найденного параметра, если отказаться от условия, что функция правдоподобия примет максимальное значение?

Известно, что областью применения статистики как научного метода являются массовые повторяющиеся явления. Верификация регулярности в массовых явлениях необходимо предполагает, что исследуемые статистические характеристики являются устойчивыми. Применение принципа правдоподобия не позволяет верифицировать устойчивость статистических оценок. Во-первых, в известных руководствах по математической статистике используют все имеющиеся данные для определения оценки параметра и тем самым не осуществляется проверка устойчивости полученного результата на новых данных. Во-вторых, проверка независимости в основном осуществляется на интуитивных основаниях. От анализа принципа правдоподобия перейдем к краткому рассмотрению критериев оценивания.

Анализ качества критериев оценивания. В фишеровской концепции статистики метод ММП считается обоснованным, так как его использование приводит к получению статистических оценок, обладающих свойствами состоятельности, несмещенности и эффективности.

Оценка t_n параметра θ называется состоятельной, если имеет место сходимость по вероятности этой оценки к искомому параметру [39]. Другими словами, для $\forall\ \varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} P\{\,|t_n - \theta| < \varepsilon\}=1. \qquad (4)$$

Свойство состоятельности не позволяет определить величину отклонения оценки найденной с помощью метода ММП по конечной выборке от оценки, удовлетворяющей выражению (4).

Оценка t_n параметра θ называется несмещенной, если математическое ожидание оценки совпадает со значением искомого параметра [39]:

$$M[t_n] = \theta. \qquad (5)$$

Математическое ожидание является теоретической величиной. Равенство (5) не означает, что математическое ожидание оценки t_n существует, верным является обратное, а именно если математическое ожидание оценки существует, то выполняется выражение (5).

Анализ принципа рандомизации, оснований проверки гипотез и оценивания параметров позволяет реконструировать философские и методологические позиции Фишера. Фишер не был эмпириком. Методология оценивания параметров оказывается свидетельством антиэмпиристичности фишеровского подхода, потому что с самого начала предполагается существование теоретического распределения. Фишер не являлся сторонником частотного подхода. В его концепции принцип максимального правдоподобия, методология проверки гипотез предназначены для анализа единичных событий. Анализ единичных событий находится вне границ применимости частотного подхода.

В методологической литературе Фишер считается представителем частотной концепции [39; 15]. Эта оценка не является вполне правильной. В чисто частотной концепции Мизеса вероятность может быть приписана только коллективу событий, обладающему свойством статистической устойчивости. В концепции Рейхенбаха вероятность может быть получена и для отдельного события. При этом предполагается, что рассматриваемое событие является членом коллектива и вероятность события совпадает с вероятностью, которая была приписана коллективу.

Применение принципа ММП для сингулярных событий, понятие доверительного интервала и проверка гипотез в концепции Фишера не имеют частотного характера. Согласно частотному принципу, события с большой вероятностью будут появляться чаще, чем события с малой вероятностью. Частотный принцип не предполагает в отличие от фишеровского подхода, что в первом и единственном проведенном эксперименте произойдет событие с наибольшей вероятностью. Поэтому методология Фишера не является ни частотной, ни эмпирической. Мы полагаем, что в лучшем случае эта концепция является квазичастотной и квазиэмпирической.

От концепции Фишера перейдем к анализу концепции Неймана–Пирсона. В отличие от подхода Фишера, в концепции Неймана–Пирсона развита методология проверки ряда гипотез.

§ 4. Проверка гипотез по Нейману–Пирсону

Развитием фишеровской концепции проверки одной гипотезы о соответствии данных теоретическому распределению является теория Неймана–Пирсона проверки нескольких гипотез.

В этом подходе задается основная гипотеза H_0 и одна или более альтернативных гипотез: $H_1, H_2, ..., H_m$. Пусть для простоты $m = 1$. Гипотезы представляют разную значимость. Пусть H_0 означает, что человек болен и его нужно лечить, H_1 означает, что человек здоров и нет смысла его лечить. Последствия от необоснованного отвержения гипотезы H_0 приносят больший ущерб здоровью человеку по сравнению с ошибочным отвержением гипотезы H_1.

В аналитическом аппарате теории Неймана–Пирсона учитывают два вида ошибок. Ошибка первого рода означает отклонение гипотезы H_0 при условии, что она является истинной. Ошибка второго рода означает принятие гипотезы, когда эта гипотеза является ложной. Для отклонения гипотез строится критическое множество R, и если результаты эксперимента попадают в область R, то основная гипотеза отклоняется. К критическому множеству предъявляются следующие требования: вероятность попадания результата эксперимента в критическую область при условии, что гипотеза H_0 является истинной, должна быть минимально возможной. Другими словами, ошибка первого рода $\alpha = P(x \in R / H_0)$ должна равняться минимально возможной величине. При попадании результата эксперимента в область S-принятия гипотезы H_0 не исключена возможность ошибочного принятия гипотезы H_0, когда она ложная, и тем самым ошибочное отклонение H_1, когда она истинная. Ошибочное отклонение альтернативной гипотезы H_1, когда эта гипотеза является истинной, называется ошибкой второго рода. Формально ошибка второго рода $\beta = P(x \in S / H_1)$ должна быть минимально возможной. Из всех возможных областей с одной и той же ошибкой первого рода выбирается область с минимально возможной ошибкой второго рода.

Критическая область R обладает двумя свойствами:

1) $\alpha = P(x \in R / H_0)$ принимает минимальное значение;

2) $1 - \beta = P(x \in R / H_1)$ принимает максимальное значение.

Величина $1 - \beta$ называется мощностью критерия. Для фиксированного объема данных невозможно одновременно уменьшать ошибки первого и второго рода. При уменьшении ошибки первого рода увеличивается ошибка второго рода и наоборот. На практике для ошибки первого рода часто назначают величину 0.05. Эта величина называется уровнем значимости. При фиксированном уровне значимости определяется критическая область с максимальной мощностью критерия.

При фиксированной ошибке первого рода построение критической области с минимальной ошибкой второго рода основано на так называемой лемме Неймана–Пирсона. Прежде чем сформулировать лемму, введем необходимые понятия. Пусть $X_1, X_2, \ldots, Xn$ – независимые случайные величины с одними и теми же плотностями распределения: $\rho_1(X, \theta)$, $\rho_2(X, \theta)$, …, $\rho_n(X, \theta)$. Здесь θ – неизвестный параметр плотности распределения. Кроме того, пусть случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ принимают значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Правдоподобием выборки называется совместная плотность распределения случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ при условии, что эти величины приняли значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod \rho(x_i, \theta),\ i=1,n. \quad (1)$$

Пусть имеются две гипотезы: H_0 данные соответствуют плотности распределения $\rho(xi,\theta_0)$ с параметром θ_0 и H_1 данные соответствуют плотности распределения $\rho(x_i,\theta_1)$ с параметром $\theta1$. Для проверки гипотезы составляется отношение правдоподобий.

$$\prod \rho\,(x_i, \theta_0)\,/\,\prod \rho\,(x_i, \theta_1). \quad (2)$$

На качественном уровне отношение правдоподобий позволяет оценить, какая из гипотез является более правильной. Если отношение (2) больше единицы, то гипотеза H_0 предпочтительнее гипотезы H_1, если это отношение меньше единицы, то гипотеза H1 предпочтительнее.

Формальный критерий опровержения гипотезы H_0 в пользу гипотезы H_1 дан в известной лемме Неймана–Пирсона [39].

Лемма Неймана–Пирсона. Пусть гипотеза H_0 утверждает, что неизвестный параметр распределения ρ равен константе θ_0, а гипотеза H_1 утверждает, что этот параметр имеет значение θ_1. Тогда отношение правдоподобия

$$\prod \rho\,(x_i, \theta_1)\,/\,\prod \rho\,(x_i, \theta_0) > k_\alpha \quad (3)$$

является наиболее мощным критерием среди всех критериев с фиксированной ошибкой первого рода α. Здесь k_α – константа, выбираемая таким образом, чтобы ошибка первого рода критерия не превышала критическое значение α.

В математической статистике все гипотезы делятся на два больших класса. Первый класс – это простые гипотезы. Утверждение называется простой гипотезой, если оно задано полностью. Утверждение называется сложной гипотезой, если некоторые параметры распределения, описывающего гипотезу, не известны. Анализ сложных гипотез существенно сложнее, чем анализ простых гипотез. Дадим определение наилучшей критической области.

Критическая область, мощность которой не меньше любой другой области того же размера, называется наилучшей критической области, сокращенно (НКО). Лемма Неймана–Пирсона доказывает существование наиболее мощного критерия для простых гипотез и предлагает способ построения НКО. Если одна из гипотез является сложной гипотезой с двумя и более неизвестными параметрами, то построение единой НКО не всегда возможно. Для каждого параметра, определяющего простую гипотезу, определяется своя область НКО. В общем случае невозможно построение единой области НКО, критерии, обеспечивающие построение единой области НКО, называются равномерно наиболее мощными критериями (РНМ).

В случае проверки двух сложных гипотез отношение правдоподобий (1) не может быть использовано, так как некоторые параметры функций правдоподобия неизвестны. В этом случае исследуют отношение максимальных правдоподобий. Для первой функции правдоподобия определяют максимальное значение на параметрическом пространстве первой гипотезы. Для второй функции правдоподобия определяют максимальное значение на параметрическом пространстве первой и второй гипотез. Для случая двух сложных гипотез отношение максимумов двух функций правдоподобия будет всегда меньше единицы:

$$\lambda = \max_{\omega}\prod \rho(xi, \theta_0) \,/\, \max_{\Omega\cup\omega}\prod \rho(xi, \theta_1). \tag{4}$$

Если отношение λ близко к единице, то гипотеза H_0 будет принята, в противном случае будет принята альтернативная гипотеза H_1. В случае двух сложных гипотез неизвестно распределение статистики λ. Для выборок большого объема данных, проверку двух сложных гипотез осуществляют с помощью статистики 2log λ, которая сходится к распределению $\chi 2$ с (r – s) степенями свободы, где r – число параметров, соответствующих гипотезе H_1, а s – число параметров, соответствующих гипотезе H_0 [39].

Сравнение методологических подходов проверки гипотез по Фишеру и Нейману–Пирсону. 1. Подход Фишера является развитием критерия Пирсона хи-квадрат, предназначенного для проверки одной гипотезы о соответствии данных определенным распределениям. В подходе Неймана–Пирсона сравниваются две и более гипотезы.

2. В подходе Фишера критическая область строится для хвостов распределений. Подход Неймана–Пирсона является универсальным, критическая область может быть построена в произвольной области распределения, например, в центре распределения.

3. Подход Неймана–Пирсона является в большей степени теоретическим, чем фишеровская методология. Это связано с понятием достаточной статистики. Одной из проблем проверки гипотез является то, что возможные результаты эксперимента могут быть описаны различными статистиками. Статистика t называется достаточной для исследования неизвестного параметра θ [Там же], если совместное распределение независимых статистик $t, t_1, t_2, \ldots, t_r$ может быть представлено следующим образом:

$$f_r(t, t_1,t_2,\ldots,t_r \mid \theta) = g(t \mid \theta)*h_{r-1}(t_1,t_2, \ldots, t_{r-1} \mid t). \tag{5}$$

Если утверждение (5) верно для каждого r и любого набора (r – 1) статистик t_i, то это означает, что статистика t содержит всю информацию о параметре θ.

Теория проверки гипотезы о соответствии данных распределению по Фишеру не может быть адекватно представлена посредством понятия достаточной статистики. Неадекватность вызвана тем, что для одного и того же пространства возможных результатов одинаково подходят две различные достаточные статистики. При этом использование одной достаточной статистики ведет к опровержению гипотезы, а при использовании другой достаточной статистики гипотеза принимается.

В случае проверки нескольких гипотез по Нейману–Пирсону достаточная статистика содержит всю релевантную информацию, относящуюся к проверяемым гипотезам. Достаточные статистики адекватны, в силу того что одна и та же статистика подходит для всех возможных значений исследуемого параметра.

С точки зрения теории статистики, для случая проверки простых гипотез теория Неймана–Пирсона имеет преимущество по сравнению с теорией Фишера. Для случая сложных гипотез преимущество теории Неймана–Пирсона исчезает. В обоих случаях неизвестно аналитическое распределение статистик критериев.

С логико-эпистемологических оснований оба подхода одинаковы. Опровержение и принятие гипотез имеют не логические, а прагматические основания. В случае, когда все гипотезы заданы полностью, теория Неймана–Пирсона обеспечивает выбор наилучшего описания объекта теории. Если одна из гипотез задана частично, то возникают все те проблемы, о которых мы писали в параграфе, посвященном статистической теории Фишера.

§ 5. Проблема корректного применения вероятностной математики в работах Колмогорова

Наибольшее влияние на развитие вероятностной математики оказали работы Колмогорова, относящиеся к аксиоматизации теории вероятностей на основе новейших достижений в теории меры. Кроме аксиоматизации теории вероятностей, работы Колмогорова в области вероятностной математики относятся к теории вероятностей, основаниям теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам.

Все разделы вероятностной математики так или иначе используются в приложениях – и элементы теории вероятностей, и теории случайных процессов, но бесспорно, что самой популярной в приложениях является математическая статистика. У Колмогорова имеется ряд работ, относящихся к прикладной математической статистике, например универсальный метод проверки принадлежности данных различным непрерывным распределениям. Колмогоров был одним из первых, кто понял значимость проблемы робастности статистических методов. Специалистам в области прикладной и математической статистики известны его публикации, относящиеся к исследованию несмещенных статистических оценок, где впервые было отмечено, что популярные критерии не являются робастными [48].

Эти работы оказали влияние на развитие прикладной статистики. Если влияние прикладных работ Колмогорова на прикладную вероятностную тематику является бесспорным, то влияние работ, посвященных аксиоматизации теории вероятностей, на проблему корректного использования вероятностной математики не является столь очевидным.

Прежде чем пытаться определить степень влияния работы «Основные понятия теории вероятностей», в которой была решена шестая проблема Гильберта об аксиоматизации основных разделов физики и теории вероятностей на прикладную тематику, необходимо задаться принципиальным вопросом об уместности исследования философской и прагматической значимости абстрактной математики в контексте проблемы корректных приложений.

Вполне возможно, что по отношению к произвольно взятой абстрактной теоретической математической дисциплине такая постановка вопроса может оказаться бессмысленной. Но по отношению к теории вероятностей такого рода рассуждения заслуживают внимания по ряду обстоятельств. Во-первых, теория вероятностей считается теоретическим фундаментом математической статистики и прикладной статистики, последняя из этих дисциплин напрямую предназначена для анализа практических задач. Во-вторых, во всех формализованных интерпретациях теории вероятностей, начиная с классической, принято обсуждать связь теоретических и эмпирических величин в контексте интерпретации и границы применимости этой формализации [49].

Приведенные доводы объясняют уместность исследований адекватности вероятностной интерпретации для приложений. Но они не проливают свет на связь оснований теории вероятностей и проблемы корректного применения математической статистики. Тем не менее имеются вполне обоснованные основания для исследования влияния абстрактных разделов теории вероятностей на проблему корректного применения вероятностной математики.

Во-первых, теория вероятностей еще в начале XX столетия считалась естественно-научной дисциплиной, поэтому один раздел книги Колмогорова специально посвящен проблеме связи теории вероятностей и реальности. Во-вторых, Колмогоров является признанным лидером отечественной и мировой математики. Кроме того, он был философствующим математиком, занимался приложениями, поэтому приведенные соображения о связи мира опыта с абстрактной теорией в книге «Основные понятия теории вероятностей» оказали существенное влияние на методологию применения вероятностной математики.

Методологические проблемы приложений теории вероятностей специально исследуются Колмогоровым в ряде работ [50]. В названной выше книге, почти полностью посвященной теоретическим проблемам [19], второй параграф первой главы под названием «Отношение к данным опыта» посвящен методологическим проблемам приложений.

В нем представлена общая схема применения теории вероятностей к действительному миру опыта, предложены принципы связи теоретических и эмпирических величин и проанализирована эмпирическая дедукция аксиом.

Применение теории вероятностей предполагает выполнение следующих условий:

1. Считается известным определенный комплекс условий, допускающий неограниченное число повторений.

2. Определено множество событий, которые могут наступать в результате осуществления этого комплекса условий. В это множество элементарных событий включаются все возможные варианты появления или не появления различных комбинаций событий.

3. Определено множество исследуемых событий и формулируется связь событий и элементарных событий.

4. Определены действительные числа, которые являются вероятностями возможных событий, происходящими при повторении комплекса условий, определенного в первом пункте.

Связь эмпирических и теоретических величин задается с помощью следующих постулатов, которые для краткости обозначены Колмогоровым латинскими буквами А и В. В этих постулатах принимается во внимание, что действительные числа, являющиеся вероятностями, обладают определенными свойствами. В приводимой ниже формулировке этих постулатов вероятность события А обозначена так: Р(А).

А. Н. Колмогоров пишет: «А. Можно практически быть уверенным, что если комплекс условий будет повторен большое число n раз и если при этом через m обозначено число случаев, при которых событие А наступило, то отношение m / n будет мало отличаться от Р(А).

В. Если Р(А) очень мало, то можно практически быть уверенным, что при однократной реализации условий событие А не будет иметь места» [19, с. 13].

Первый постулат является финитарным вариантом требования Мизеса к объектам частотной эмпирической теории. В предисловии к параграфу, посвященному обоснованию связи теории и опыта, Колмогоров отмечает, что «в изложении необходимых предпосылок для приложимости теории вероятностей к миру действительных событий автор в значительной мере следует выводам Мизеса» [19, с. 12].

Второй принцип связывает статистическую теорию с реализацией единственного события. Этот принцип противоречит частотной методологии Мизеса. Согласно Мизесу, вероятность может быть определена исключительно для коллектива событий. Второй принцип носит название принципа Коорнота, по имени философа, который придал ему методологический статус. Но известен он был еще до Коорнота, по крайней мере, он встречается в работах Я. Бернулли.

В 1713 г., уже после смерти Я. Бернулли, была опубликована написанная им книга «Искусство предположений» [51]. В четвертой части этой книги Бернулли был предложен и доказан первый вариант теоремы закона больших чисел. В трактовке Бернулли утверждается, что при проведении достаточно большого числа независимых испытаний, направленных на изучение некоторого события, оказывается чрезвычайно низкой вероятность произвольно малого отклонения вероятности этого события от частоты этого события. Низкая вероятность события позволяла считать это событие практически невозможным. Событие, противоположное к маловероятному событию, имеет высокую вероятность. Бернулли понимал высокую вероятность как моральную определенность и предлагал использовать частоту этого события для оценивания его вероятности.

В серии работ Шафера и Вовка, посвященных 100-летию со дня рождения Колмогорова и 70-летию первого издания книги Колмогорова «Основные понятия теории вероятностей», дан анализ истории появления, развития и особенностей применения принципа Коорнота [45]. В XVIII столетии широко обсуждались вопросы взаимоотношения вероятностной моральной определенности и физической определенности. По мнению Бюффона, это различие может быть оценено количественно. Так, вероятность события 9 999 / 10 000 делает это событие морально определенным, а вероятность появления восхода солнца на следующий день позволяет считать это событие физически определенным.

Коорнот, по имени которого был назван принцип анализа редких событий, был философом науки и экономистом, применявшим статистические методы. Его работа, опубликованная в 1843 г. [Там же], дала импульс анализу событий с малыми вероятностями и связи теоретических и физических вероятностей. У Коорнота эта связь иллюстрируется следующим примером. При бросании тяжелого конуса математически возможно, что конус установится в равновесии в определенной вершине, но это невозможно физически. В трактовке Коорнота физически невозможен результат, опровергающий теорему закона больших чисел.

В середине XIX столетия принцип Коорнота получил применение в физике. В работе Больцмана, посвященной термодинамике, маловероятные события считаются физически невозможными. Больцман объяснял, что статистические диссипативные термодинамические процессы необратимы, потому что вероятность состояния с энтропией далекой от максимума чрезвычайно мала.

Коорнот был первым, кто связал теорию вероятностей как науку с реальностью, трактуя события с низкими вероятностями как физически невозможные. Существует два разных варианта принципа Коорнота, так называемые сильный и слабый варианты. Согласно сильной форме, события с нулевой вероятностью и ничтожно малой вероятностью являются физически невозможными. Слабая форма принципа Коорнота утверждает, что события с малой вероятностью в повторяющихся испытаниях будут происходить чрезвычайно редко.

В теории вероятностей сильная форма в контексте схемы независимых испытаний позволяет обосновать устойчивость частот в теореме закона больших чисел. В математической статистике сильная форма является методологическим принципом фальсификации гипотез. Если происходит событие с малой вероятностью при условии справедливости гипотезы, то эта гипотеза считается фальсифицированной.

При использовании сильной формы принципа принятые в теории вероятностей Колмогорова, постулаты А и В, в условиях схемы независимых испытаний оказываются связанными. Постулат А в схеме независимых испытаний выводится из постулата В в сочетании с теоремой закона больших чисел.

Слабая форма позволяет утверждать, что обычно вероятность хорошо аппроксимируется частотой в длинной серии испытаний. Когда мы оцениваем вероятность с помощью частоты, то слабой формы недостаточно, необходимо сделать следующий шаг. А именно полагать: то, что обычно происходит, то и произошло в частном случае. Для перехода к этому частному случаю требуется использование принципа в сильной форме.

Колмогоров принимает постулат В сильной форме. И в то же время он считает постулаты А и В независимыми друг от друга по нескольким причинам. Дело в том, что в случае принятия постулата В в сильной форме при условии, что эксперименты описываются схемой независимых испытаний, получим, что эта концепция оказывается применимой к вероятности сингулярного события и тем самым она оказывается античастотной концепцией. А это противоречит утверждению Колмогорова о том, что по отношению к вопросам применения теории он в основном придерживается позиции Мизеса.

Колмогоров считает, что постулаты независимы, а при развертывании теории независимых испытаний они оказываются связанными. Свидетельствует ли этот факт о формальных или содержательных ошибках? На самом деле здесь нет ни формальных ошибок, ни содержательных просчетов.

в момент формулирования аксиом и постулатов теорема закона больших чисел еще не была дедуцирована из аксиом и постулатов. Кроме того, из интуитивных и содержательных соображений постулаты не являются связанными.

Получается, что, с одной стороны, постулаты являются независимыми, с другой стороны, математическая экспликация этих постулатов в схеме независимых испытаний обнаруживает подчиненное положение постулата, выражающего связь частоты и вероятности, принятую в частотной концепции. Связь постулатов обнаруживается при развертывании схемы независимых испытаний. Поэтому серьезный анализ связи постулатов предполагает исследование понятия независимых экспериментов. В пятом параграфе Колмогоров показывает значимость понятия независимости для развития теории вероятностей. Колмогоров показывает, что все фундаментальные результаты в теории вероятностей получены в случае независимых экспериментов или слабозависимых экспериментов. Но слабая зависимость сводится к независимости. В то же время по отношению к реальным данным понятие независимости не получило достаточно обоснованной экспликации. Проблема исследования адекватности математической и реальной независимости адресуется Андреем Николаевичем в область философских исследований.

Частотная позиция являлась комфортной позицией для Колмогорова по политическим причинам. Во-первых, объективистская концепция статистики Мизеса являлась более адекватной, чем субъективистская концепция для науки и марксистской философии. Во-вторых, значимость мизесовской частотной концепции в целом была обоснована в работах Хинчина [52]. Хотя Мизес и был позитивистом, но он больше известен не философскими работами, а своими трудами в области науки. Он был крупным ученым в области аэродинамики, теории вероятностей и математической статистики.

Колмогоров несколько раз на протяжении своей блестящей научной карьеры возвращался к анализу частотной концепции. В работе Шафера и Вовка [Там же] отмечено несколько работ Колмогорова, в которых использовалась неформальным образом частотная концепция Мизеса [19; 50; 53]. Тем не менее концепцию Мизеса Колмогоров не считал успешной, так как некоторые особенности формализации Мизеса представлялись ему неприемлемыми. В статье «О таблицах случайных чисел» Колмогоров писал: «(1) частотный подход, основанный на понятии предельной частоты при стремящемся к бесконечности числе испытаний, не позволяет обосновать применимость результатов теории вероятностей к практическим задачам, в которых мы имеем дело с конечным числом испытаний;

(2) частотный подход в случае большого, но конечного числа испытаний не может быть развит строго формально, чисто математически [53, с. 205].

В этой статье была предложена финитная формализация частотной концепции. Для решения этой задачи необходимо было получить финитную формализацию требований Мизеса к коллективам.

Некоторые авторы полагают, что первое требование о существовании предела бесконечной последовательности относительно конечных последовательностей не имеет смысла [54]. На самом деле понятие сходимости для конечной последовательности имеет смысл. Смысл заключается в том, что частота исследуемого признака для этой последовательности должна приблизительно равняться частотам на подпоследовательностях.

Наибольшую сложность для финитной формализации составляет второе требование Мизеса к коллективам. Второе требование Мизеса заключается в выделении подпоследовательностей и проверке близости частот на этих подпоследовательностях. Вначале Колмогоров предложил обобщение формального описания выбора, которое было предложено Черчем [55]. Корректные способы выделения подпоследовательностей были названы допустимыми алгоритмами.

Для проверки одинаковой встречаемости признаков на полученных выборках требуется определение случайности для конечных последовательностей. Предположим, что дана система допустимых алгоритмов выбора $\mathfrak{R}_N = \{R\}$ из таблицы данных размера N. Для простоты будем полагать, что все таблицы состоят из нулей и единиц.

Определение. Таблица T размера N называется (n, ε) случайной по отношению к системе $\mathfrak{R}_N$, если существует такая константа p, $0 \leq p \leq 1$, что для всякого $A = R(T)$, $R \in \mathfrak{R}_N$ с числом элементов $v \geq n$ частота

$$\pi(A) = 1 / v \sum_{k \in A} t_k$$

удовлетворяет неравенству

$$|\pi(A) - p| < \varepsilon.$$

Здесь ε – точность вычислений, иногда говорят о (n, ε, p)-случайности. Главным достижением Колмогорова в проблематике, относящейся к частотной случайности, является теорема о существовании (n, ε, p) случайных таблиц [53].

Теорема. Если число элементов системы $\mathfrak{R}_N$ не превосходит

$$\tau(n, p) = 1/2e^{2n\varepsilon 2(1-\varepsilon)},$$

то для любого p, $o \le p \le 1$ существует таблица T размера N, являющаяся (n, ε, p)-случайной по отношению к $\mathfrak{R}_N$.

Определенным обобщением результата Колмогорова является следующая (доказанная Амброскевичем) теорема [56]. Прежде всего, новации связаны с уточнением понятия (n, ε)-случайной таблицы. Пусть $a_1, a_2, ..., a_N$ (n, ε)-случайная таблица. Результат работы допустимого алгоритма $R \in \mathfrak{R}_N$ применительно к $a_1, a_2, ..., a_N$ обозначим следующим образом:

$$R(a_1, a_2, ..., a_N) = R(ak_1, ak_2, \ldots, ak_n).$$

Через l(x) обозначим длину последовательности x. Тогда $a_1, a_2, ..., a_N$ (n, ε)-случайная таблица для $\mathfrak{R}_N$, если для любого $R \in \mathfrak{R}_N$: $l(R(a_1, a_2, \ldots, a_N) \ge n$, и частота последовательности $R(a_1, a_2, \ldots, a_N)$ отличается от частоты $a_1, a_2, ..., a_N$ меньше, чем на ε.

Пусть $a_1, a_2,.., a_N \in A^N$ и A конечное множество. Задан предикат

$$W(x) = \bigcup_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Этот предикат называется случайным свойством, если множество бесконечных последовательностей $a_1, a_2, ..., \in A^n$ таково, что существует $k \ge n$ и при этом предикат $W(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ равен единичной мере. Другими словами, $W(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \forall a \in A \,|\mu(a) - 1/n\sum\chi_a(ai)| < \varepsilon$ является случайным свойством. Окончательный результат имеет следующий вид: для любого натурального числа n, случайного свойства W и конечного множества допустимых алгоритмов $\mathfrak{R}_N$ предикат $W^*(x) = x$ есть (n, W)-случайная таблица для $\mathfrak{R}$ есть случайное свойство.

Сформулированные Колмогоровым и Амброскевичем теоремы являются чистыми теоремами существования. Они не содержат средств, позволяющих определить, является ли последовательность данных случайной последовательностью. По-видимому, из-за отсутствия конструктивных формальных подходов для анализа финитных частотных формализаций Колмогоров потерял интерес к частотной концепции. Наша оценка сложности развития частотных концепций подтверждается суждением Хакинга об отсутствии математических теорем, где на основании известной частоты появления результата в одной последовательности выводится заключение о частоте успеха в другой последовательности [27].

Отсутствие строгих результатов в частотной концепции привело к игнорированию этой области математиками и многими методологами статистики. Фактически решать сложности проблемы приложений приходится самим прикладникам и некоторым методологам, работающим в области ответственных приложений. Такое положение дел не является допустимым. По нашему глубокому убеждению, отсутствие конструктивных теорем об устойчивых статистических характеристиках и строгой методологии применения частотной статистической концепции являются импульсом для создания методологии применения этой интерпретации на основе эксперимента.

От анализа влияния теории вероятностей Колмогорова на анализ корректных приложений перейдем анализу значимости теоремы закона больших чисел.

§ 6. Теорема закона больших чисел

Достаточно общий взгляд на теоремы типа закона больших чисел в работе [18] представлен следующим образом. Пусть дана произвольная последовательность случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots \qquad (1)$$

Используя первые n членов выше заданной последовательности, с помощью симметричных функций строим последовательность случайных величин ζn:

$$\zeta n = fn(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n) \qquad (2)$$

Если существует такая последовательность постоянных величин a_1, $a_2, .., a_n, \ldots$, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} p\{ |\zeta_n - a_n| < \varepsilon \} = 1, \qquad (3)$$

то говорят, что последовательность (1) удовлетворяет закону больших чисел с заданными функциями fn.

Обычно в качестве функций fn рассматривается среднее арифметическое ξi, $l = 1, n$.

Первый вариант теоремы закона больших чисел был опубликован в 1713 г. в книге «Искусство предположений» Я. Бернулли, ушедшего из жизни в 1705 г.

Уже при жизни Бернулли был высоко оценен современниками. Он был избран иностранным членом Парижской академии наук и Прусского научного общества. Но наибольшее признание получила теорема закона больших чисел. Книга Бернулли, особенно ее четвертая часть, содержащая доказательство этой теоремы, много раз переиздавалась на различных языких. В 1913 г., к 200-летию со дня выхода книги, данная часть доказательство теоремы по поручению Петербургской академии наук была переведена русский язык.

Формулировка теоремы закона больших чисел, предложенная Бернулли, имеет следующий вид: «Пусть число благоприятных случаев относится к числу неблагоприятных точно или приближенно, как r к s, или к числу всех случаев как r к r + s, или r к t, каковое отношение заключается в пределах (r + 1) / t и (r - 1) / t.

Требуется доказать, что можно взять столько опытов, чтобы в какое угодно данное число раз (с раз) было вероятнее, что число благоприятных наблюдений попадет в эти пределы, а не вне них, т. е. что отношение числа благоприятных наблюдений к числу всех будет не более чем (r+1)/t, и не менее, чем (r - 1) / t» [51, с. 56].

Эта теорема была доказана элементарными средствами, на основании свойств биномиальных коэффициентов, без использования специальных вероятностных рассуждений, и она дала импульс к поиску адекватных методов для доказательства теорем подобного вида. Прогресс в развитии данного направления связан с доказанным независимо Чебышевым и Бьенэмэ неравенством, получившим название Бьенэмэ–Чебышева.

Неравенство Бьенэмэ–Чебышева. Для любой случайной величины ξ, имеющей конечную дисперсию $D\xi$, при каждом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P\{\,|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq D\xi / \varepsilon^2.$$

На основании этого неравенства Чебышевым была получена ставшая классической форма теоремы закона больших чисел.

Теорема Чебышева. Если $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots$ последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной C : $D\xi_1 \leq C$, $D\xi_2 \leq C$, …, $D\xi_n \leq C$, …, то, каково бы ни было постоянное $\varepsilon > 0$, имеет место, следующее неравенство:

$$\lim_{n \to \infty} P\{\,|1/n \sum \xi_k - 1/n \sum M\xi_k| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Из закона больших чисел в форме Чебышева теорема Бернулли выводится в качестве следствия. В современной литературе теорема Бернулли имеет следующую формулировку.

Теорема. Пусть μ – число наступлений события А в n независимых испытаниях и p есть вероятность наступления А в каждом из испытаний. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\mu / n - p(A)| < \varepsilon\} = 1. \quad (4)$$

Как с философских, так и с прагматических позиций теорема Бернулли была сразу высоко оценена. Во-первых, Бернулли имел высокий научный авторитет, его работы высоко ценились. Сохранилась переписка Бернулли с Лейбницем, в том числе и по тематике, относящейся к книге «Искусство предположений». Во-вторых, эта книга действительно являлась капитальным научным трудом по теории вероятностей, комбинаторике и их применению для решения различных проблем, относящихся к справедливому проведению жеребьевок и анализу карточных игр, и до сих пор вызывает интерес историков науки, философов и математиков.

Достоинства книги выявляются при анализе ее содержания. Наиболее важна четвертая часть, предназначенная для применения вероятностных и комбинаторных методов в гражданских, моральных и экономических делах.

Основные достижения работы Бернулли таковы. Во-первых, он показал, что вероятностные рассуждения имеют универсальный характер. Невероятностные рассуждения связаны с небольшой областью подлинного знания. В основании всего остального знания лежат догадки и предположения. К этому массиву знания и относятся вероятностные рассуждения.

Бернулли пишет: «Делать о какой-либо вещи предположения – все равно что измерять ее вероятность» [51, с. 27]. Искусство предположений определяется у Бернулли, как искусство возможно точнее измерять вероятности событий. Он следующим образом обосновывает значимость искусства точного вычисления вероятностей: «…чтобы в наших суждениях и действиях мы всегда могли выбирать или следовать тому, что будет найдено лучшим, более удовлетворительным, спокойным разумным. В этом единственно заключается вся мудрость философа и благоразумие политика» [Там же].

Во-вторых, он формулирует условия корректного применения вероятностных рассуждений. В основе корректного применения вероятностных рассуждений лежит понятие нравственно достоверного. Бернулли пишет: «Нравственно достоверно то, чего вероятность почти равна полной достоверности, так что разница неощутима» [Там же, с. 24]. Нравственно невозможное определяется как дополнительное событие к нравственно достоверному событию.

В-третьих, он формулирует девять правил, определяющих условия, при которых необходимо обязательно добиваться достоверной оценки событий, или в этом нет необходимости и достаточно убедиться в нравственной возможности события, кроме того, он приводит примеры, когда достаточно ограничиться общими вероятностными рассуждениями и когда необходимо принимать во внимание конкретные вероятностные оценки.

Первым высокую эпистемологическую и прагматическую оценку значимости теоремы закона больших чисел дал сам Бернулли. Эта оценка связана с утвердительным ответом на вопрос, который был им сформулирован. Суть вопроса заключается в следующем. Ограниченна ли точность оценивания вероятности некоторого события при увеличении числа наблюдений, или эта оценка может быть сделана как угодно точной? Свой вопрос он поясняет следующим примером. Предположим, что в урне находится 2 000 черных и 3 000 белых шаров. Исследователь не знает состава урны. Эксперимент заключается в вынимании шара с возвращением. Возникает вопрос: возможно ли для отношения белых к черным шарам получить такие узкие границы оценки, как 299 / 200 и 301 / 200 или 2999 / 2 000 и 3001 / 2000?

Бернулли полагал, что его теорема справится с задачей о шарах. Более того, он полагал, что теорема будет адекватной, если урну заменить человеческим телом, а отношение шаров – отношением позитивных и негативных исходов при лечении болезни. Он настаивал на следующем: не яслужит препятствием для его подхода то обстоятельство, что число болезней является конечным, но неизвестным числом, переменным числом или даже бесконечным числом.

Насколько правильна оценка Бернулли своей теоремы? Для ответа на этот вопрос необходимо принять во внимание основания аппарата, которым получено доказательство теоремы, а также необходим содержательный анализ теоремы. Доказательство теоремы является строгим, оно получено на основании свойств биномиальных коэффициентов. Тогда возникает вопрос: является ли адекватной модель, построенная на основе свойств биномиальных коэффициентов миру реальных событий? Очевидно, что предлагаемый теоремой аппарат не полностью адекватен задаче о шарах, моделирующих болезни, потому что в теореме вероятность успеха эксперимента задана apriori, в отличие от исследуемого им примера о шарах, где не было известно соотношение белых и черных шаров и поэтому не была известна исходная вероятность. Теорема в лучшем случае предлагает средства для проверки уже имеющейся закономерности.

В современной теории вероятностей и математической статистике отмечается высокая значимость этой теоремы. В формулировке Чебышева теорема Бернулли относится к предельным теоремам. В работе Колмогорова и Гнеденко отмечается, что познавательная ценность теории вероятностей связана только с предельными теоремами. Основной аргумент в пользу этого утверждения в работе [57] связан с тем обстоятельством, что решение неасимптотических задач не может являться объектом достаточно общей теории.

Другие аргументы в пользу этой теоремы таковы. Так в работе Гнеденко приведена следующая аргументация: «В практической деятельности, да и в общетеоретических задачах большое значение имеют события с вероятностями близкими к единице или нулю. Отсюда становится ясным, что одной из основных задач теории вероятностей должно быть установление закономерностей, происходящих с вероятностями, близкими к единице: при этом особую роль должны играть закономерности, возникающие в результате наложения большого числа независимых или слабо зависимых случайных факторов. Закон больших чисел является одним из таких предложений теории вероятностей и при том важнейшим» [18, с. 185]. И далее: «На самом же деле непреходящая научная ценность исследований Чебышева, Маркова и других исследователей в области закона больших чисел состоит не в том, что они подметили эмпирическую устойчивость средних, а в том, что они нашли те общие условия, выполнение которых обязательно влечет за собой статистическую устойчивость средних» [Там же, с. 186].

Кроме математической значимости теоремы, в литературе отмечается значимость предельных теорем теории вероятностей и для математической статистики. Как известно, фундаментальное различие теории вероятностей и математической статистики заключается в том, что аппарат теории вероятностей обеспечивает корректное вычисление вероятностей событий, если задано вероятностное пространство, т. е. множество элементарных событий, множество событий и вероятностная мера. Задачи математической статистики являются в некотором смысле обратными и заключаются в определении первичных вероятностных характеристик исследуемых объектов.

Возникает вопрос статуса теоремы закона больших чисел: является ли она теоретико-вероятностной, т. е. позволяет ли вычислять вероятности событий на основании вероятностей элементарных или же она позволяет выявить и верифицировать первичные вероятностные характеристики, например определить устойчивость частот, и тем самым она относится к математической статистике?

В теореме закона больших чисел теоретическая величина «вероятность успеха» задана априори и тем самым теорема не может быть использована для определения этой уже известной вероятности. Поэтому данная теорема относится к теории вероятностей. Кроме того, заключение теоремы говорит о вероятности события, представляющего собой разность вероятности события А и частоты события А. Под событием в прикладных науках понимается результат реального опыта. Так как вероятность события не может являться результатом реального испытания, поэтому заключение теоремы не имеет прямой эмпирической интерпретации.

При эмпирической интерпретации, например в метрологической концепции Алимова, вероятность события определена тогда и только тогда, когда соответствующая частота является устойчивой. При эмпирическом подходе внешняя вероятность в выражении (1) должна быть заменена частотой [6], тогда заключение примет следующий вид:

$$\lim_{n\to\infty} \omega n\{|\mu / n\text{-}p(A)| < \varepsilon\} = 1. \qquad (5)$$

В выражении (5) символ ω обозначает частоту, а символ n – большое число.

Тогда заключение теоремы, записанное с помощью выражения (5) говорит о частоте отклонения абсолютной разности между вероятностью события A и частотой этого же события, при условии, что эта разность меньше эпсилон. Эвристическая ценность заключения теоремы для определения устойчивости частоты при ее эмпирической интерпретации вызывает большие сомнения. Действительно, если вероятность события A близка к нулю, то в заключение теоремы говорится о частоте частоты события A. Предположим, что теорема имеет эвристическое значение, тогда оно заключается в том, что по частоте частоты события A предполагается возможным определить устойчивость частоты события A.

Очевидно, что методологическая значимость такой интерпретации теоремы явно переоценивается. Во-первых, невозможно определить частоту отклонения частоты события A от вероятности, предварительно не определив частоту события A. Во-вторых, для того чтобы использовать частоту частоты события в целях определения устойчивости события, предварительно необходимо убедиться в наличии устойчивости частоты от частоты события. Продолжая аналогию, для того чтобы убедиться в устойчивости частоты от частоты события A, необходимо использовать более сложную конструкцию, а именно требуется частота от частоты события B, последнее событие, в свою очередь, является частотой события A. Налицо логический круг. Подобные соображения содержатся в работах [6; 10; 50].

Другие аргументы против интерпретации устойчивости частот в теореме закона больших чисел таковы. С самого начала признается существование теоретической величины – вероятности успеха. Если она существует, то должны быть эмпирические свидетельства существования, т. е. эмпирическая устойчивость частот. Если существуют такие свидетельства, то с эмпирических позиций доказана устойчивость частот. Если она не существует, то результат вида

$$\lim_{n\to\infty} P\,(p(A) - m / n) < \varepsilon) = 1 \qquad (6)$$

не имеет эмпирического смысла, так как в нем используются величины, не имеющие эмпирической интерпретации. Поэтому условие (6) не может быть использовано для проверки близости p(A) и m / n. В литературе встречается следующая аргументация в пользу того, что теорема закона больших чисел имеет прагматический смысл. Утверждается, что сама по себе близость величин p(A) и m / n не доказывает устойчивости, так как вероятность этой близости может быть мала.

С эмпирических позиций этот аргумент не имеет особого значения. Предположим, производятся длительные статистические эксперименты. В течение многократно проведенных экспериментов была показана устойчивость результатов. Поэтому аргумент о случайной близости не имеет силы. Единственное соображение против наблюдающейся устойчивости таково: при повторном проведении экспериментов, подавляющее большинство результатов этих экспериментов не подтвердит устойчивость.

От проблемы значимости теоремы закона больших чисел перейдем к некоторым вопросам методологии прикладной математики.

§ 7. Методология прикладной математики и Новый эмпиризм

Проблемы корректного применения математики имеют не очень длинную историю. Проблемы адекватности математического аппарата относятся к решаемым проблемам, проблемы корректного применения математики – к методологии прикладной математики. Прикладная математика оформилось в самостоятельное направление в середине прошлого столетия. До начала XX столетия проблемы корректного применения математики не существовало. Математику использовали профессиональные математики и физики, уровень математической подготовки в используемых ими разделах математики не уступал математикам.

Возникновение прикладной математики как самостоятельного направления связано с рядом причин.

Во-первых, высокий уровень развития математики и достаточно высокий уровень развития теоретического знания в некоторых областях науки и техники сделали возможным применение математики. Математики обнаружили различные области приложений за пределами физики – традиционной области приложений математики. Математики применяли как известные методы решения задач, так и специально разрабатывали новые методы. Так, В. Л. Канторович специально развил методы линейного программирования, оказавшиеся эффективными для решения проблемы эффективного раскроя материалов.

Во-вторых, области приложений математики оказывают влияние на ее развитие. Применение математики часто требовало новых математических методов, потому что решаемые задачи в прикладных областях предъявляют новые требования к методам, которые отличаются от академического решения задач. Как пишет Эльясберг, «астроном в XIX столетии мог полжизни решать задачу вычисления орбиты интересующей астрономов планеты. При движении направления движения современного космического корабля имеются доли секунды для определения траектории движения» [58].

В-третьих, широкому применению математических методов способствовало появление вычислительных машин. Массовое появление компьютеров, особенно мини-ЭВМ, обеспечило весьма комфортный доступ к компьютерам, оснащенными пакетами математических программ миллионам пользователей.

Каковы причины широкого применения математики? Данный вопрос редуцируется к следующему вопросу: является ли математика эффективной или существует мода на математизацию? На этот вопрос имеются разнообразные ответы. Во-первых, математика стала неотъемлемым инструментом практически во всех областях знания. Во-вторых, во многих областях знания невозможно представить работу к публикации, в которой не используется формальный аппарат. Какой из аргументов является более важным? Или эти аргументы равноправны? Ответы на эти вопросы зависят от множества факторов, в том числе от области приложений. Поэтому имеются разнообразные ответы на эти вопросы.

Ответы на вопросы об эффективности математики должны учитывать по меньшей мере две составляющие. Во-первых, о применени какой математики – так называемой чистой математики или прикладной математики – идет речь. Применение чистой математики означает применение ее теоретических понятий для непосредственной интерпретации в применяемой области исследований. По существу применение чистой математики основано на структурализме. Математическая и физическая структура – это множества с отношениями. При этом существует функция, осуществляющая гомеоморфное отображение из одного множества в другое.

При использовании прикладной математики методология структурализма не является адекватной для описания взаимоотношений между миром математических понятий и миром понятий прикладной области. В данной области априори не существует структуры прикладной области. Например, в методологии прикладной статистики, в основе которой находится эмпиризм, исходной реальностью являются данные исследований. Представляют ли эти данные структуру, нужно определить экспериментально в сочетании с несложным математическим аппаратом.

Во-вторых, необходимо учитывать область приложений. Является ли областью приложений физика или другие дисциплины, традиционные для приложений математики? Или область приложений относится к гуманитарным дисциплинам и поэтому требует особых формальных подходов.

Наиболее эффективной находили математику, когда ее структуры оказывались подобными структурам области приложений. В этом смысле непостижимая эффективность математики (в данном случае теории групп в физике) оказывается вполне постижимой. Винер писал о больших проблемах применения математики, играющей большую роль в физических исследованиях, за пределами физики, например в социологии [59]. Создатель кибернетики, дисциплины, которая имеет широкие области приложений, прекрасно понимал, что универсальных методов познания не существует. Один и тот же метод в зависимости от области приложений может быть эффективным, бесполезным или даже вредным. Во многих прикладных науках известны примеры не только неэффективного, но даже просто некорректного применения математики.

Например, анализ примерно 200 кандидатских и докторских диссертаций в области медицины и биологии показал, что в подавляющем числе работ статистические методы использовались неоптимальным образом или просто неправильно, без учета границ применимости соответствующих методов [9]. Авторы данной работы полагают, что такое положение дел связано с недостаточным вниманием к проблеме обучения студентов методам теории вероятностей, а также социальными причинами, в силу которых статистический метод как средство принятия решений в условиях неопределенности долгое время не являлся вполне легитимным. Об этом свидетельствует запрет на преподавание биостатистики, когда генетика была объявлена лженаукой.

Кроме медицины и биологии наименее обоснованной областью применения математической статистики является область стандартизации. Многие госты в технике, использующие статистические методы, содержат грубые ошибки [8].

Многочисленные примеры некорректного и неэффективного применения математики в 1960–1980-е гг. привели к появлению множества публикаций, излагающих методологические основания корректного построения математических моделей. Наиболее известными авторами работ являются А. Н. Крылов, В. С. Пугачев, А. Д. Мышкис, И. И. Блехман, Е. С. Вентцель, В. В. Налимов, Ю. И. Алимов, В. Н. Тутубалин, А. И. Орлов, Г. Я. Пановко, П. С. Эльясберг и некоторые другие. Большинство авторов занимались применением математики в ответственных областях приложений. В этих областях предпочтительнее использование многократно проверенных на практике не обязательно элегантных в математическом отношении моделей. По существу философскими основаниями прикладной математики являлось здоровое сочетание эмпиризма и рационализма.

Подобные процессы независимо происходили в западной методологии науки. В середине прошлого столетия в западной философии возникло направление под названием новый эмпиризм. Его появление стало реакцией на доминирующую роль теории в науке и философии [26]. Наиболее известными представителями данного направления являются П. Суппес, Н. Картрайт, А. Хакинг, Д. Майо и другие представители западной философии науки.

Причины появления нового эмпиризма разнообразны:

1. Успешность эмпирических оснований для успешного решения проблем во многих областях знания.

Эмпиризм является методологическим фундаментом экспериментальных методов, компьютерного моделирования и эмпирических теорий. В последние годы экспериментальные методы, компьютерное моделирование и эмпирические теории являются популярными. Популярность этих трех направлений объясняется тем, что с их помощью получены солидные результаты, которые не могли быть получены с помощью теорий. В настоящее время имеется колоссальное количество сложных разнообразных проблем, для которых не существуют адекватные теоретические средства. Отставание уровня развития теоретического знания от запросов практики является абсолютно естественной ситуацией.

В исключительных ситуациях достаточно чисто теоретических методов для решения задачи, имеющей практический интерес. Сложные проблемы, имеющие практический интерес, решаются на основе синтеза теоретических методов и полуэмпирических и экспериментальных методов. Так, создание больших программных продуктов до сих пор не является чисто логико-математической проблемой.

2. Реакция на часто незаслуженное доминирование интереса к теоретическому знанию во многих областях науки и философии.

Существует своего рода социальная протекция работам, посвященным теоретическим разработкам и философскому анализу теоретических исследований в области науки. Так, в современной философии науки наблюдается явное доминирование интереса к теоретической тематике по сравнению с методологией экспериментального знания. Это положение обосновано Хакингом в работе «Представление и вмешательство», в которой он на ряде примеров показал, что статьи, посвященные теоретическому знанию, беспрепятстсвенно проходили в печать по сравнению с публикациями, посвященными эмпирической проблематике.

Имеется множество вполне обоснованных работ, показывающих неоправданно высокий научный статус и значимость теоретических законов даже в области физики. Н. Картрайт в своей знаменитой книге «Почему врут законы физики?» приводит убедительную аргументацию об ограниченной значимости теоретического знания как средства решения физических проблем. Во-первых, для конкретных задач специально разработанные полуэмпирические методы обеспечивают получение более точных решений, чем решения, полученные на основе фундаментальных теорий. Во-вторых, не существует универсальных физических законов, описывающих явления, относящиеся к различным разделам физики.

Не только в области философии или физики имеет место явное доминирование интереса к теоретическим разработкам. Даже в области математической статистики происходит доминирование теоретического знания. С самого начала предполагается, что существует теоретическое распределение. Роль выборки ограниченна, она сводится к использованию для определения неизвестных параметров известных априори распределений. В то же время современные методы теоретической статистики обеспечивают получение точных решений, только если модель точно описывает данные. В настоящее время не существует статистической теории, обеспечивающей для широкого класса практических задач получение решения с небольшой погрешностью, если модель данных неточна в небольшой степени.

Очевидно, что эмпиризм является адекватной концепцией для развития методологии прикладной математики. Определенная работа в области методологии прикладной математики была сделана классиками позитивизма. Так, вполне современно звучат аналогии Гексли об уместности сравнения математического аппарата с жерновами, а данных – с зернами пшеницы. Хорошая мука получится, если выполняются два условия. Первое условие данные (зерна) хорошего качества. Второе условие математический аппарат (жернова) адекватен для обработки данных (помола).

Вполне основательные методологические принципы прикладной математики, имеющие значение для современного этапа развития математики, были сформулированы уже Контом [60]. По Конту, применению математики предшествует тщательное определение некоторых характеристик исследуемых объектов путем проведения экспериментов. Если некоторые характеристики объекта не могут быть получены путем непосредственных измерений, то они получаются на основе применения математики.

Конт относил математику к естественно-научным дисциплинам. Типичное применение научного метода, опирающегося на математику, по Конту, состоит в применении декартовского принципа «разделяй и властвуй». Решение исследуемой проблемы получается с помощью последовательного решения ряда вспомогательных задач.

Предполагается, что решение сводится к определению совокупности переменных величин

$$X_1, X_2, \ldots, Xn. \quad (1)$$

Для того чтобы это осуществить, предварительно определяется совокупность переменных

$$P_1, P_2, \ldots, Ps. \quad (2)$$

Переменные последовательности (2) сущностно связанны с искомыми переменными, и они могут быть экспериментально исследованы с заданной точностью. Использование математики предполагает определение функций F1, F2, ..., Fm, связывающих измеряемые в эксперименте переменные с искомыми переменными.

Решение системы уравнений

$$Fi(P_1,P_2, \ldots, Ps) = Xi, I = 1, m \qquad (3)$$

приводит к определению искомых параметров.

После Конта эмпиризм не был лидирующей концепцией в философии науки. Развитие методологии прикладной математики и появление философии нового эмпиризма являются свидетельствами расцвета и заслуженного признания эмпиризма. Эти обстоятельства оказывают положительное влияние на решение проблем корректного применения математики.

Специального внимания заслуживает вопрос о влиянии абстрактной математики на проблемы корректных приложений. Вопрос является не надуманным, а вполне естественным, некоторые разделы математики являются популярными в приложениях, а их основания являются чрезвычайно абстрактными.

Например, основания теории вероятностей после работ Колмогорова построены на фундаменте теории меры. Теория меры является сложной абстрактной дисциплиной, интересной для теоретиков в области чистой математики. Для специалистов в области прикладной математики и конкретных специалистов, занимающихся приложениями, теория меры, с одной стороны, сложна для усвоения, так как предполагает наличие высокой математической культуры, а с другой стороны, она не имеет прагматической значимости.

Не только освоение оснований теории вероятностей предъявляет высокие требования к общей математической квалификации, изучающих эту науку. Изучение аппарата теории вероятностей тоже является непростой задачей, так как в этой дисциплине используются знания из различных областей математики. В теории вероятностей используется комбинаторный анализ, математический анализ, матричный анализ, теория функций комплексного переменного, и другие разделы математики.

Теория вероятностей, с одной стороны, является сложной для усвоения абстрактной математической дисциплиной, а с другой стороны, в приложениях обычно применяются элементарные основы этой дисциплины. Поэтому неадекватность абстрактных разделов теории вероятностей обычно критикуют прикладники. Гораздо реже теорию вероятностей критикуют чистые математики.

В этой связи представляется интересным критическое замечание о колмогоровской теории, сделанное известным теоретиком, специалистом в области абстрактных разделов теории вероятностей Э. Нельсоном: «Основания теории вероятностей были заложены уже более 50 лет назад Колмогоровым. Я уверен, что помимо меня и многие другие специалисты по теории вероятностей, читающие студентам старших курсов свой предмет, чувствуют, что указанные основания с помощью теории меры служат в большей мере тому, чтобы успокоить нашу математическую совесть, а не тому, чтобы предоставить точное и острое оружие ученому, желающему применять теорию вероятностей» [61, с. vii].

Нельсон и некоторые другие математики полагают, что основания теории вероятностей будут не менее строгими и в то же время более ясными, если они будут основаны на теории нестандартного математического анализа, разработанного А. Робинсоном [62], а также на основе игровых принципов, представленных в работах Шеффера и Вовка [63].

Нами были рассмотрены фундаментальные эмпирические частотные концепции Мизеса и Рейхенбаха, нефундаментальные квазиэмпирические частотные концепции Фишера и Неймана–Пирсона. Все рассмотренные выше концепции являются классическими. Теперь мы переходим к анализу метрологической концепции, являющейся современной фундаментальной эмпирической частотной концепцией.

§ 8. Метрологическая концепция статистики

Метрологическая концепция статистики является эмпирической частотной статистической концепцией. Изначальной реальностью обладают данные. Полуэмпирические характеристики существуют, если они являются устойчивыми. Теоретические характеристики являются представителями устойчивых полуэмпирических характеристик.

Метрологическая концепция была в основном создана Ю. И Алимовым в 70–80-е гг. XX столетия в серии статей [6; 64; 65]. Кроме того, он написал учебное пособие по математической статистике и теории вероятностей, полностью построенное на основе частотной концепции [20; 66–67]. Основная задача прикладной статистики – проверка устойчивости статистических характеристик. Алимов пишет: «Современная наука на большой скорости проходит мимо задачи определения устойчивости» [6]. Статистический метод близок эмпирическому, если современные статистические теории не способны обеспечить верификацию устойчивости теоретическими методами, то эта задача должна решаться на основе эксперимента в сочетании с использованием несложной математики.

Почему так важна проверка устойчивости? Потому, что одной из главных задач любой научной области является построение точных прогнозов. Прогноз тем точнее будет построен, чем более устойчивыми окажутся статистические характеристики, на основе которых строится прогноз. Поэтому понятие устойчивости является более значимым, чем понятия распределения и независимости, которые являются базовыми в математической статистике.

Почему понятие устойчивости является более важным, чем базовые понятия математической статистики? Дело в том, что имеет смысл исследовать тип распределения и наличие независимости, если соответствующие характеристики являются устойчивыми. Не существует противоречия в целях метрологической концепции Алимова и частотной концепции Мизеса. Хотя существуют определенные различия в этих теориях. Концепция Алимова нефундаментальная теория, а концепция Мизеса фундаментальная теория.

Объекты эмпирической теории Мизеса – это бесконечные последовательности, удовлетворяющие двум законам: закону устойчивости и закону иррегулярности. Объекты эмпирической теории Алимова – это множества конечной мощности, удовлетворяющие первому требованию Мизеса. Закон иррегулярности или случайности представляется Алимову экзотическим, так как для проверки случайности имеются надежный эмпирический критерий невозможности предсказания.

Метрологическая концепция является синтезом трех подходов. Во-первых, это частотные концепции Мизеса и Рейхенбаха, в особенности первая из них. Алимов подчеркивает особую значимость частотного подхода для развития науки, особенно естественных и технических наук. Во-вторых, методологические принципы корректного применения прикладной математики. В-третьих, методологические принципы метрологии. В отличие от математической статистики, метрология предлагает ясные критерии идентификации модели, реалистичные требования к точности, основанные на конечном числе повторения измерений, для получения точных характеристик измеряемого объекта и одновременно измерения погрешности измеренного параметра.

В связи с актуальностью метрологической концепции возникают два определенным образом связанные вопроса. Насколько актуальными для развития математической статистики являются метрологические установки и метрологическое мышление в целом? Насколько корректно название «метрологическая концепция»? Имеется несколько аргументов против выделения в отдельную науку метрологической концепции. Во-первых, действительно существует целое семейство прикладных статистических дисциплин, в названии которых подчеркивается метрологическая составляющая. Известными направлениями математической статистики являются технометрика, эконометрика, биометрика, психометрика. Несмотря на присутствие в названии слова «метрика», метрологическая компонента в этих науках представлена весьма скудно. Во-вторых, действительно выделена в отдельную область знания прикладная теория измерений, которая является синтезом логики и статистического анализа. Теория измерений играет определенную роль для развития гуманитарного знания, особенно психологии. В теории измерений по существу решается несколько задач. Основной является определение отображений, оставляющих инвариантными результаты измерений, полученных в разных шкалах. При всей важности этой задачи теория измерений оставляет вне внимания множество идей и принципов метрологии – науки об измерениях. Поэтому аргументация в пользу выделения метрологической концепции статистики в отдельное направление представляется вполне обоснованной.

В метрологической концепции критикуются понятия фишеровской статистики, не имеющие частотной интерпретации. Так, с метрологических позиций основные понятия современной математической статистики доверительной вероятности и доверительного интервала имеют в лучшем случае некоторое теоретическое значение и не имеют прикладной значимости. Понятие доверительной вероятности является основным понятием статистической теории оценивания параметров и проверки гипотез. Это понятие было введено Нейманом [5]. Понятие доверительного интервала означает интервал, покрывающий искомое значение оцениваемого параметра распределения. Теория Неймана является математически корректной. Концы доверительного интервала в этой теории определяются случайными функциями. В этом случае корректно говорить о произвольной вероятности попадания неизвестного параметра, являющегося константой в интервал со случайными концами.

Теория Неймана не согласуется с естественно-научными традициями. Физики привыкли измерять мировые фундаментальные константы, например скорость света, предоставляя значение скорости света и невероятностный доверительный интервал, определяющий погрешность измерений. Экспериментаторы заинтересованы в определении погрешности с детерминированными концами. Поэтому в практических работах понятие доверительного интервала со случайными концами подменяется интервалом, концы которых вычислены по данным. В результате приходим к вероятности попадания константы в доверительный интервал с фиксированными концами. Это вольная трактовка результата Неймана приводит к бессмысленному результату о вероятности, отличной от нуля, и единицы попадания константы в фиксированный интервал.

С метрологических позиций, состоятельность оценки, являющейся значимым показателем качества оценивания параметров в работе [58] названа одним из мифов XX столетия. Оценка t_n называется состоятельной оценкой параметра θ, если эта оценка сходится по вероятности к параметру θ. Понятие бесконечного числа измерений является неадекватной идеализацией для метрологической практики. Для измерения любой характеристики объекта существует оптимальное конечное число измерений, начиная с которого, дальнейшие измерения не улучшают качество измеряемых характеристик.

В метрологической концепции критикуются методологические принципы принятия модели независимых измерений, принятые в статистической практике сторонниками фишеровской статистической теории. Наличие независимости многократно упрощает вычисления. Кроме того, метод максимального правдоподобия, позволяющий получать статистические оценки, являющиеся состоятельными, предполагает независимость случайных величин, описывающих данные.

Так как полная проверка независимости предполагает знание распределения данных, что имеет место далеко не всегда, то часто принимается модель независимых испытаний на основе интуитивных соображений. Полагают, что если эксперименты проводились при контролируемых условиях и интуитивно результаты наблюдений являются независимыми, то адекватной является формальная модель независимых испытаний.

Алимовым убедительно показано, что методологические принципы принятия модели независимых экспериментов на основе предположения о полном контроле экспериментальных условий плюс интуиция не являются убедительными. Во-первых, за пределами физики осуществить полный контроль практически невозможно. Даже в физике известны проблемы с фоновыми условиями. Из истории физики известно, что в лаборатории Резерфорда, где впервые был открыт радон, приборы стали вести себя непредсказуемым образом. Только после того как стало ясно, что новое вещество является газообразным и были дополнительно рафинированы условия проведения экскрементов, приборы пришли в порядок.

Методологические основания принятия и опровержения моделей в метрологии являются адекватными практике естествознания, критерии принятия и фальсификации гипотез являются более конкретными по сравнению с методологией Фишера. Предположим, что измеряют диаметр тела на основе принятой модели шара. Так как все диаметры шара равны, измеряют диаметр в разных направлениях. Если разности измерений превышают заданную точность, то модель шара отвергается [68].

Так как в арсенале стандартной математической статистики отсутствуют теоретические средства проверки устойчивости, то Алимовым разработаны методологические принципы эмпирической проверки и предложены два алгоритма проверки устойчивости. Первый алгоритм носит название метод многих серий. Этот подход применяется, если имеется достаточно много данных. Пусть стоит задача оценивания математического ожидания, и пусть имеются данные Z1, Z2, …, Zn.

Тогда данные разбиваются на k равных групп, по m данных в каждой группе. Для каждой выделенной группы определяется среднее арифметическое Ri, I = 1, k. Далее определяется минимальное и максимальное среднее, Rmax и Rmin. Задается точность вычислений ε.

Величины $R_1, R_2, \ldots, R_k$ являются статистически устойчивыми, если

$$|Rmax - Rmin| < \varepsilon, \qquad (1)$$

здесь ε – заданная точность вычислений. Если соотношение (1) не выполняется, то возможны два варианта. В первом случае теоретическое математическое ожидание не существует, так как эмпирические средние являются неустойчивыми. Во втором варианте данных оказалось недостаточно для обнаружения устойчивости. В случае принятия второй гипотезы предлагается увеличить число данных и продолжить проверку устойчивости в надежде, что устойчивость будет обнаружена.

Для проверки адекватности найденного эмпирического среднего необходимо взять новые данные с большим числом групп K >> k, и с большим числом, чем прежде количестве данных в новой группе M >> m. Далее вычисляются новые средние $R_1, R_2, \ldots, R_K$.

Если новые Rmin и Rmax, удовлетворяют соотношению (1), то тем самым на большом полигоне данных убедительно установлено существование математического ожидания. В качестве математического ожидания можно взять любое значение из интервала (1).

Второй метод оценивания среднего носит название метод удлиняющейся серии. Этот метод применяется, если имеется немного исходных данных. Пусть имеются данные $Z_1, Z_2, \ldots, Z_s$. Произвольным образом из исходных данных отбираются $Z_1, Z_2, .., Z_n$, где n < s. Выборка разбиваются на q групп, q≥2. Далее вычисляются средние $R_1, R_2, \ldots, R_q$. Вычисляются Rmin и Rmax и проверяется соотношение 1

В чем отличие с алгоритмом многих серий? Отличие заключается в следующем. При проверке устойчивости используются старые данные из q групп и оставшиеся неиспользованные данные добавляются в эти группы к старым данным.

Метод многих серий и метод удлиняющейся серии приводят к построению невероятностных доверительных интервалов. Методология оценивания статистических характеристик является эмпирической. Не принимаются во внимание никакие предположения ни о типе распределения, ни о независимости данных.

Существует определенная идейная связь концепции Конта и метрологической концепции, хотя нет оснований говорить о прямом влиянии или даже косвенном влиянии методологии Конта на развитие прикладной математики, и в частности на метрологическую теорию. В работах Алимова, Тутубалина, Крылова и др., так или иначе оказавших влияние на создание метрологической концепции, нет ссылок на работы Конта. Это вполне объяснимо. Дело в том, что работы позитивистов в России никогда не были популярными и широко известными. Основные принципы контовской методологии являются естественными для корректных приложений математики в технических науках и были, по всей вероятности, сформулированы независимо от французского философа методологами в области прикладной математики.

В отличие от Конта, влияние мизесовской статистической концепции на метрологическую концепцию является прямым и непосредственным. Мы полагаем, что метрологическая концепция это недостающее звено частотной концепции Мизеса. Как известно, Мизес не разработал методологию применения своей концепции для проверки устойчивости частот для конечного множества данных. Метрологическая концепция Алимова восполняет этот пробел.

В контексте метрологического мышления необходимо сделать некоторые замечания к алгоритмам определения устойчивости, предложенным Алимовым. Мы полагаем, что алгоритмы Алимова в большей мере соответствуют случаю проверки устойчивости статистических характеристик для данных, полученных другими исследователями. В случае проведения собственных исследований адекватной представляется другая постановка. Предположим, что обнаружена устойчивость статистических характеристик для некоторых групп данных. Возможно, эти результаты получены разными исследовательскими группами или разными методами измерений. Возникает задача получения статистической характеристики на объединенных данных с лучшими статистическими характеристиками, чем получены для отдельных групп. Такая постановка является более естественной для метрологии, и она включает в себя постановку, предложенную Алимовым.

В свете этой интерпретации второе требование Мизеса к коллективам означает устойчивость выборок, и оно является более важным, чем требование устойчивости данных на агрегированной выборке. В предлагаемом подходе формирование данных осуществляется без привлечения идеи случайности. Выборки формируются содержательным образом, например, каждая выборка содержит данные, характеризующие определенный эксперимент. Идея устойчивости в концепции Алимова является первостепенно важной. Для эмпириков теоретические подходы к описанию случайности или независимости не считаются значимыми.

В теоретических концепциях статистики идея независимости или близкая к ней идея случайности являются более важными, чем идея устойчивости. Поэтому сопоставление подходов к описанию случайности в чистой и прикладной математике позволяет оценить и сопоставить некоторые тенденции в развитии прикладной и чистой математики.

§ 9. Проблема случайности в частотной концепции в контексте чистой и прикладной математики

Между чистой и прикладной математикой существует множество принципиальных различий, в том числе в выборе решаемых задач и способах их решения. Так, исследования в области чистой математики направлены на развитие математического знания. Исследования в области прикладной математики связаны с решением проблем из других областей знания.

Не любое применение математики за ее пределами может быть отнесено к прикладной математике. В подавляющем числе работ, выходящих под титулом прикладной математики, прикладная задача является просто поводом для исследования методов чистой математики и результаты исследований фактически относятся к чистой математике.

Основной результат в прикладной математике относится к прикладной области. В отечественной методологической литературе проблематика прикладной математики не является популярной. В отечественной литературе нам известны всего две монографии, всесторонне излагающие методологию прикладной математики. Одна из них посвящена общим проблемам прикладной математики, а вторая в основном методологии применения математики для исследования механики [69; 70].

Методология чистой и прикладной математики существенно различаются. В чистой математике теоремы имеют условную форму.

Если имеет место следующее множество утверждений, то отсюда следует такое-то утверждение. В чистой математике вопрос о том, действительно ли условия теоремы выполняются, не является принципиальным и в этой области не рассматривается вопрос, насколько сложно добыть знания, составляющие условия теоремы в конкретной области приложений.

В прикладной математике эти вопросы имеют принципиальное значение. Тем не менее концептуальные возможности для их решения весьма ограничены. Это связано с тем, что современная прикладная математика занимается преимущественно разработкой абстрактных моделей. Предполагается, что исходная модель каким-то образом задана. Задача исследователя заключается в уточнении этой модели.

Модельная направленность прикладной математики сближает чистую и прикладную математику. Эта тенденция в прикладной математике неоднократно подвергалось критике методологами в области прикладной математики. Во-первых, модели редко бывают, известны априори. Во-вторых, априорное знание модели ограничивает эффективность математики. Это связано с тем, что в известной части модели принципиально больше содержится информации, чем в неизвестной части модели.

В данной работе на примере частотной концепции показаны различия в мотивации исследований и методах решений задач в чистой и прикладной математике.

Частотная концепция оказала огромное влияние на развитие философии науки, прикладной математики и чистой математики. Впервые в рамках частотной концепции была поставлена проблема допустимого объекта теории. По Мизесу, теория может быть использована исключительно для объектов специального вида. Естественно, что теория Мизеса оказала влияние на прикладную математику. Удивительно, но концепция Мизеса оказала влияние и на развитие чистой математики. В данной работе предлагается сравнительный анализ влияния проблемы случайности в концепции Мизеса на развитие чистой и прикладной математики.

Первое и второе основные требования Мизеса к коллективам оказали неодинаковое влияние на развитие исследований в чистой и прикладной математике.

В частотной теории Мизеса рассматриваются бесконечные последовательности, упорядоченные по времени. Все допустимые коллективы удовлетворяют двум условиям. Согласно первому условию, коллектив представляет собой последовательность частот, сходящуюся к определенному пределу. Этот предел является вероятностью. Специалисты в области чистой математики критикуют первое требование Мизеса, потому что Мизес не задает закон бесконечной последовательности. Поэтому невозможно строго определить предел последовательности. Представители прикладной математики, в частности Алимов, предлагают алгоритм приближенного определения наличия предела. Согласно второму условию, любая бесконечная подпоследовательность, выбранная по произвольному правилу, сходится к тому же самому пределу.

Второе требование Мизеса о произвольном выборе сходящейся подпоследовательности получило название запрета системы в игре. Если каждая подпоследовательность представляет результаты некоторой игры, то, по Мизесу, эти результаты должны быть случайными по отношению друг к другу или независимыми.

Второе требование иногда называется иррегулярностью. Возникает вопрос, существует ли хотя бы одна последовательность все подмножества, которой удовлетворяют второму требованию Мизеса? Предположим, имеется последовательность, состоящая из нулей и единиц. Выбирая по определенному алгоритму те члены последовательности, которые являются нулями или только единицами, получаем последовательность, частота которой отличается от частоты во всем коллективе.

Раз на всех подпоследовательностях предел не может быть одинаковым, то возникает задача описания подпоследовательностей с одинаковым пределом. Одно подходящее множество является очевидным: последовательности из каждого второго элемента, каждого третьего и т. д. каждого n-го члена коллектива. Пусть дана последовательность такая, что для каждого n подпоследовательность, состоящая из каждого n-го члена исходной последовательности и начинающаяся с некоторого произвольного ее члена, будет иметь предел относительной частоты, равный пределу относительной частоты в исходной последовательности. В этом случае исходная последовательность называется последовательностью Бернулли [71].

В литературе доказано существование последовательностей Бернулли, более того, строго сформулированы алгоритмы построения последовательностей Бернулли. Следовательно, предельно частотная модель непротиворечива, если ограничиться упомянутым выше множеством Бернулли.

Однако вне поля нашего зрения тогда остается огромное число последовательностей. Каков бы ни был объем множества Бернулли, всегда найдутся последовательности, не включенные в этот список. Возникает вопрос: как корректно можно расширять список последовательностей с одним и тем же пределом?

Самый сильный известный результат таков: пусть дано произвольное, но фиксированное не более, чем счетное, множество последовательностей. Показано, что предположение об обладании некоторой последовательностью пределом относительных частот и относящейся к данному множеству последовательностей не может привести к противоречию. Таким образом, располагая исходной последовательностью, невозможно выдвинуть требование о существовании одного и того же предела во всех подпоследовательностях, но, имея произвольное счетное множество последовательностей, вполне корректно требовать, чтобы постоянство пределов относительных частот выполнялось именно на этом множестве последовательностей, выбранных из данной счетной последовательности.

Наибольшей критике подвергнуто второе требование Мизеса к коллективам, так как оно не имеет конструктивный характер. Сам Мизес в работе «Вероятность и статистика» следующим образом формулировал требования к выбираемым последовательностям: «Коллектив есть ряд единичных наблюдений, при котором… относительная частота появления каждого единичного… признака стремится к определенному предельному значению» [11, с. 30]. Помимо этого требования выдвигается и другое: «…это предельное значение должно оставаться неизменным, если из всей последовательности произвольно выбрать любую часть и рассматривать в дальнейшем только эту часть» [Там же, с. 31].

Что Мизес понимал под произвольным выбором? У него можно найти следующие указания об осуществлении произвольного выбора: «Само собой разумеется, что выбранная последовательность должна быть бесконечной, как и сама основная последовательность… В остальном фантазии предоставлена полная свобода. Нужно только иметь возможность решать вопрос о принадлежности или непринадлежности каждого отдельного бросания к выбранной частичной последовательности независимо от результата этого бросания, т. е. при помощи некоторого правила, относящегося к номеру данного бросания и установленного прежде, чем стал известен его исход» [11, с. 31–32].

Кроме этих общих замечаний, сформулированы некоторые конкретные правила выбора частичных последовательностей. В названной выше работе отмечены следующие правила выбора:

1) выбор членов последовательности с четными номерами;

2) выбор членов последовательности, номера которых простые числа;

3) выбираются те члены последовательности, которым предшествуют единицы.

В прикладной математике второе требование к коллективам, равносильное понятию случайности, считается интересной теоретической проблемой. Дело в том, что очень часто условие случайности формализуется с помощью идеи симметрии, поэтому требования Мизеса предполагают симметрию. Вопрос о том, является ли симметрия обязательным условием проявления случайности, не освоен содержательно.

Формализация случайности для прикладников является экзотической задачей. Реалистичный признак случайности заключается в невозможности прогнозирования. Удачный прогноз свидетельствует о том, что исследуемый процесс не является случайным.

В чистой математике мотивация новых постановок задач связана с появлением новых методов. Например, интерес к формализации понятия случайности связан с развитием трех математических дисциплин: теории сложности, теории меры и теории вычислимых функций.

Возникновение теории сложности обязано появлению вычислительных машин и созданию компьютерных программ. В области программирования рассматривалась задача создания минимального по различным критериям алгоритма, реализующего решаемую задачу.

Предположим, что имеется некоторая последовательность чисел. Если последовательность не имеет закономерностей и для программирования этих чисел необходимо их все перебрать, то такая последовательность считается сложной. Понятие сложности имеет относительный характер. Одни алгоритмы являются более сложными, чем другие алгоритмы. Какое отношение проблема сложности имеет к исследованию случайности?

Была осуществлена редукция понятия случайности к понятию сложности. Последовательности, реализованные более сложными алгоритмами, признаются более случайными.

Какое отношение теория меры имеет для анализа проблемы случайности?

С помощью теории меры было показано, что все теоремы теории вероятностей верны на множестве единичной меры. Поэтому если утверждение о случайных последовательностях верно на множестве меры нуль, то это утверждение не считается законом теории вероятностей.

Теория вычислимых функций позволила осуществить обобщенное описание законов выбора бесконечных подпоследовательностей. Кроме того, были предложены варианты выбора конечных, случайных последовательностей.

Первый вариант формального описания правил выбора по Мизесу был предложен одним из создателей теории рекурсивных функций А. Черчем.

На языке обычного математического анализа правила Мизеса в интерпретации Черча имеют следующий вид.

Бесконечная последовательность нулей и единиц случайна, если выполнены следующие два условия:

«1) пусть $f(r)$ – число единиц среди первых r членов последовательности, тогда $f(r) / r$ стремится к некоторому пределу p при $r \to \infty$;

2) пусть an_1, an_2, ... – бесконечная подпоследовательность, полученная путем отбрасывания некоторых членов исходной последовательности в соответствии с правилом, решающим вопрос о выбрасывании an в зависимости от n и $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Тогда если $g(r)$ – число единиц среди первых r членов последовательности an_1, an_2, ..., то, $g(r) / r$ стремится к тому же самому пределу p при $r \to \infty$» [54].

В работе Шеня определение Черча сформулировано на языке теории игр. Он пишет: «Пусть некто Н участвует в азартной игре, состоящей в следующем:

1. В специальном окошке, обозреваемом Н, друг за другом появляются члены последовательности.

2. Перед появлением каждого очередного члена Н имеет право сделать одно из двух заявлений: играю или пас.

3. В первом случае при появлении единицы в окошке он выигрывает рубль, а при появлении нуля – проигрывает. Во втором случае он остается при “своих”, независимо от очередного члена последовательности» [Там же].

На языке игр последовательность не является случайной, если $\lim\limits_{n\to\infty}(An / n)$ не существует или не равен нулю, здесь An – выигрыш Н после n игр.

Использование двух альтернативных подходов на языке рекурсивных функций и на языке теории игр дает возможность сопоставления результатов от применения каждого из этих подходов.

На языке теории рекурсии основная идея выбора формулируется так: a_n включается в выбираемую последовательность, если

$$\Phi(a_1, \ldots, a_{n-1}) = \text{True}.$$

Детализируя использование рекурсивных функций для формализации понятия случайности, Черч пишет: «Если Ф – любая эффективно вычислимая функция на положительных целых числах и

$$b_1 = 1,\ b_{n+1} = 2b_n + a_n,\ c_n = \Phi(b_n),$$

то те числа n, для которых $c_n = 1$, образуют (в порядке возрастания) выбираемую последовательность a_{n1}, a_{n2}, …, и если g(r) есть число единиц среди первых r членов последовательности a_{n1}, a_{n2}, …, тогда g(r) / r стремится к тому же самому пределу p при $r \to \infty$» [54].

Анализ случайных последовательностей, удовлетворяющих определению Черча, обнаружил, что эти последовательности не удовлетворяют требованиям, предъявляемым к случайным последовательностям.

Во-первых, Вилль привел пример случайной по Черчу последовательности, в которой любой ее начальный отрезок содержит больше единиц, чем нулей. Случайность такой последовательности противоречит требованию о том, что законы теории вероятности выполняются на единичной мере. В данном случае мера множества, содержащего последовательности, в которых каждый начальный отрезок содержит больше единиц, чем нулей, равна нулю.

Во-вторых, Лэвлэнд построил пример, в котором случайная по Черчу последовательность становится неслучайной после вычислимой перестановки ее членов.

Отмеченные недостатки явились основанием для обобщения понятия допустимого правила выбора по Черчу, который был предложен в работах Колмогорова и Лэвлэнда. Прежде всего, было снято ограничение на обязательность выбора номеров членов последовательности в порядке возрастания номеров. Поэтому появляется возможность рассматривать четные номера последовательности A(2n), такие, что A(2*n + 1) = 0.

Правила выбора по Колмогорову–Лэвлэнду реализуются с помощью двух рекурсивных функций: G и H.

Функция G вычисляет номера n_k выбираемых членов последовательности: $n_k = G(An_1, An_2, \ldots An_{k-1})$ до тех пор, пока не встретится неопределенное значение номера n_k или номера не будут повторяться.

Функция $H(p_1, p_2, \ldots, p_{i-1})$ принимает два значения 0 или 1. Здесь $p_i = An_i$. Если $H(p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}) = 1$, то член An_i попадает в формируемую последовательность. Если функция H примет значение 0, то An_i не включается в формируемую последовательность.

Правила выбора по Колмогорову–Лэвлэнду имеют преимущество по сравнению с формализацией Черча, потому что при их применении невозможно при вычислимой перестановке членов случайной последовательности получить неслучайную последовательность. Возможно ли при использовании правил выбора Колмогорова–Лэвлэнда получить последовательность, в которой каждый начальный отрезок содержит единиц больше, чем нулей до сих пор остается не решенной проблемой.

Однократное применение к случайной последовательности правила выбора по Колмогорову–Лэвлэнду приводит к случайным последовательностям. Мизес требовал, чтобы любая комбинация допустимых правил выбора, примененная к случайной последовательности порождала другую последовательность, которая снова является случайной. Возникает вопрос, выполняется ли требование Мизеса при использовании комбинации правил Колмогорова–Лэвлэнда?

В работе Шеня сформулирована композиция правил выбора, которая не эквивалентна никакому допустимому по Колмогорову–Лэвлэнду правилу выбора [54].

Композиция Р3 состоит из правил Р1 и Р2. Правило Р1 предписывает выбрать второй член последовательности, если первый равен 1, а затем выбрать третий, если второй равен 0, затем в любом случае выбрать все члены, начиная с четвертого.

Правило Р2 предписывает переставить первые два члена последовательности.

На примере последовательности $\alpha = 10011 \ldots 1$ показано, что композиция Р3 не эквивалентна никакому допустимому правилу выбора.

В последние годы алгоритмический подход к анализу случайных последовательностей выделился в самостоятельное научное направление. Одним из важнейших результатов этого направления является доказательство о совпадении классов последовательностей, построенных в соответствии с теорией сложности и теорией формализующей частотный подход Мизеса. С помощью алгоритмической теории случайности были получены новые результаты в теории вероятностей. В то же время для практических применений в естественных науках теория алгоритмической случайности не является адекватной.

Необоснованным в области физики представляется считать последовательность случайной, если алгоритм, порождающий эту последовательность, известен, но он является сложным. При условии, конечно, если этот алгоритм не копирует исходную последовательность.

При физических измерениях производится фильтрация шумов, иначе объектом измерения будут шумы, а не исследуемый процесс. Алгоритмическая теория случайности не учитывает различие между шумом и измеряемым процессом. В этой связи авторы работы [64, с. 176] отмечают: «В итоге даже при относительно простом алгоритме самого исследуемого процесса, смесь сигнал + шум приобретает сложность шума. Таким образом, логика физического эксперимента в существенном едва ли совместима с концепцией алгоритмической сложности».

Альтернативой «сложностному» направлению исследований случайных последовательностей в области чистой математики является подход частичной детерминированности, относящийся к прикладной математике и разработанный в исследованиях Кравцова [72].

В рамках этого подхода суждение о детерминированности или случайности исследуемого процесса y(t) основано на степени сходства этого процесса с модельным процессом z(t).

Операцию сравнения процессов y(t) и z(t) будем обозначать следующим образом: {y(t)*z(t)}. Фигурные скобки обозначают операцию сравнения.

Количественной характеристикой сходства служит степень детерминированности:

$$D(\tau) = \{y(t)*z(t)\} / (\{y(t)*y(t)\}\ \{z(t)*z(t)\})^{1/2}. \qquad (1)$$

Здесь $\tau = t - t0$ – время, протекшее после начала наблюдения. Предполагается, что начальные условия y(t) и z(t) совпадают, т. е.

$$z(t0) = y(t0).$$

При $\tau = 0$ степень детерминированности равна 1.

$D = 1$ отвечает полной детерминированности наблюдаемого процесса относительно модельного процесса. Значения $0 < D < 1$ описывают частичную детермированность.

Характеристика детермированности позволяет определить время, в течение которого процесс вел себя предсказуемым образом. Например, интервал времени, в течение которого $D > 0.5$, определяет время частично предсказуемого процесса поведения.

В работе [72] в качестве операции сравнения наблюдавшегося и модельного процессов была выбрана операция статистического усреднения произведения y(t)z(t):

$$\{y(t)*z(t)\} = \langle y(t)z(t)\rangle, \qquad (2)$$

поэтому степень детермированности равна коэффициенту корреляции между y(t) и z(t).

Интегрируя выражение (2) по временному параметру от t_0 до $to + \tau$, получаем интегральную характеристику сравниваемых процессов:

$$\{y(t)*z(t)\} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \langle y(t)z(t)dt\rangle. \qquad (3)$$

С позиций концепции частичной детерминированности исследование проблемы случайности с помощью теории сложности имеет ряд недостатков.

Во-первых, исследование бесконечных последовательностей не имеет особого смысла, так как время прогнозируемого поведения любой системы всегда конечно.

Во-вторых, проверка наличия случайности с помощью всех мыслимых тестов, как это фактически предлагается в концепции Мартина–Лефа, не является практически выполнимой задачей.

В-третьих, в концепции исследования случайности с помощью сложности не учитывается проблема отделения шумовых помех, в то же время формула (2) решает проблему фильтрации.

На примере исследования проблемы случайности были показаны принципиально различные методологические позиции чистой и прикладной математики.

Различие проявляется во многих отношениях.

Во-первых, принципиально различной является мотивация исследований.

В чистой математике, решаемая задача (даже если она взята из практической области) представляет собой повод для решения математических проблем, например исследования взаимоотношения различных теорий, используемых для анализа решаемой задачи.

В прикладной математике главная цель исследований – решение задачи с учетом реальных временных, интеллектуальных, финансовых ресурсов.

Во-вторых, в чистой математике, например в математической статистике, с одной стороны, даются максимально точные решения, с другой стороны, алгоритмы решения не учитывают насколько реалистично выполнение предпосылок используемого метода в используемой предметной области.

В прикладной математике важным является принцип равнопрочности всех этапов исследования, сформулированный Крыловым [73]. Согласно этому принципу, качество исследований на всех этапах прикладной работы должно быть примерно одного уровня. Нет смысла в точных вычислениях, если данные собраны не качественно.

В заключение отметим, что существует определенная тенденция в сближении позиций чистой и прикладной математики. Так, с одной стороны, нестандартная теория множеств Вопенки, которая относится к области абстрактной математики, принимает во внимание интеллектуальные ресурсы и отказывается от исследования бесконечности [74]. С другой стороны, фишеровская статистическая теория, которая относится к области прикладной статистики, является модельно-ориентированной, так как с самого начала предполагается, что модель каким-то образом задана и это является характерной особенностью чистой математики.

Глава 2. НЕЧАСТОТНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ КОНЦЕПЦИИ

В первой главе рассмотрен достаточно широкий спектр частотных теорий фундаментальные теории Мизеса и Рейхенбаха, квазистатистические теории Фишера и Неймана–Пирсона и метрологическая концепция Алимова. Предназначение частотных теорий это получение объективных агрегированных характеристик. Эти теории не адекватны для объективного анализа сингулярностей.

Естественно возникает вопрос о возможности построения статистических нечастотных концепций, обеспечивающих постороение обоснованных вероятностных оценок для сингулярных событий. Теории, предназначенные для объективного анализа сингулярных вероятностей, получили название теории склонностей или пропензити (propensity). В первом параграфе дан краткий анализ теорий пропензити. Основное внимание уделено эмпирическим субъективистским концепциям.

Неэмпирическая дедуктивная вероятностная теория должна быть адекватна приложениям. Для этого необходимо, чтобы процедуры задания исходных вероятностей не приводили к противоречиям. Наиболее популярным подходом задания исходных вероятностей в логической и субъективистской концепциях является принцип индифферентности. Во втором параграфе дан анализ принципа индифферентности. Несмотря на многочисленные недостатки, существуют разнообразные попытки модификации данного принципа. Некоторые современные подходы к спасению этого принципа даны во втором параграфе.

Кроме задания исходных вероятностей корректная статистическая теория должна правильно учесть новую информацию для пересчета вероятностей. В третьем параграфе рассмотрены два подхода к заданию исходных вероятностей на основе психологических аргументов Рамсея и на основе ставочных коэффициентов, а также два принципа пересчета вероятностей.

Наиболее известными из нечастотных концепций являются логическая, субъективистская и байесовская концепции. Байесовская концепция очень популярна у философов, она применяется в экспертных системах. Эта концепция является амбициозной. Байесовисты претендуют на то, что байесовская концепция является индуктивной логикой. В отличие от них, представители фишеровской концепции не претендуют на логический статус. Представители фишеровской концепции утверждают, что предлагаемые ими подходы приводят к минимальным статистическим ошибкам. В последнем параграфе этой главы показано, что при всем разнообразии подходов байесовская и фишеровская концепция являются близкими, так как оба подхода являются модельноориентированными.

§ 1. Современные статистические теории предрасположенностей

Теория склонностей для исследования вероятностных закономерностей впервые была создана Пирсом. Количественная оценка склонности бросаемой кости к появлению на ней числа, делящегося на три равна 1/3. Если кость бросать много раз, то частота выпадаемого числа, делящегося на три, приблизительно равна вероятности, последняя в данном случае равна 1/3.

Пирс связывал исключительно со свойствами кости потенциальную частоту, с которой то или иное число будет воспроизводиться при многократном повторении эксперимента с подбрасыванием кости. Известно несколько контраргументов к связыванию склонности получения определенного результата со свойствами кости.

Первый аргумент подчеркивает важность учета фоновых условий проводимого эксперимента. Предположим, что бросается утяжеленная кость. В первый раз эксперимент проводится на Луне, а второй – на земной поверхности. В первом случае смещение от результатов правильной кости будет меньше, чем во втором случае, так как сила притяжения на Земле больше, чем на Луне.

Второй аргумент подчеркивает значимость требований к условиям проведения экспериментов и к фоновым условиям, так как совместная совокупность условий проведения экспериментов и фоновых условий в существенной степени определяют возможные результаты проводимых экспериментов. Предположим, что проводятся эксперименты по бросанию кости. В первый раз обычная кость кидается на стол. Возможными результатами являются герб и решка. Во втором случае кость бросается на стол, на поверхности которого вырезано большое множество щелей; возможными результатами являются герб, решка и ребро.

Теории предрасположенностей стали популярными после написания работ Поппера [75; 76].

Мотивация исследований теорий предрасположенностей связана с проблемами квантовой физики. Поппер полагал, что многие проблемы в квантовой физике, в частности парадокс двух щелей, связаны с использованием субъективистских концепций теории вероятностей. Являясь сторонником мизесовской частотной теории, он пытался использовать понятие коллектива событий для анализа сингулярных событий.

Ограниченность понятия коллектива была продемонстрирована в работе Поппера на следующем примере. Пусть дано бесконечное множество результатов бросаний неправильной кости со свинцом и в этой последовательности цифра шесть выпадает с вероятностью равной 1/4. В этот коллектив также включены результаты четырех бросаний правильной кости с вероятностью успеха равной 1/6.

Невозможность задания вероятностей в ригористской теории Мизеса для конечного числа событий привела к необходимости модификации частотной теории. Наблюдаемые частоты оказываются реализацией возможностей экспериментальной установки, с помощью которой осуществляются бросания кости, свойств самой кости и фоновых условий, при которых проводился эксперимент.

Возможности, или, по терминологии Поппера, предрасположенности, оказываются в теории Поппера важнее, чем реализации этих возможностей. Действительно предрасположенности оказываются первичнее, чем реализовавшиеся возможности в онтологическом плане. В частотной теории, имея бесконечный коллектив наблюдений, можно делать обоснованные выводы о предрасположенностях как реализовавшихся возможностях. В то же время представляется проблематичным конструктивное определение предрасположенностей на основании ограниченного числа наблюдений. Скорее всего теория предрасположенностей Поппера имеет некоторое философское значение, но эта теория не является адекватной ни для методологического анализа философских проблем физики, ни тем более для конкретного статистического анализа.

Попперовская теория не является конструктивной для приложений, ее значимость связана с иными обстоятельствами. Во-первых, теории предрасположенностей важны в контексте изучения всего творчества Поппера. Известно, что все работы Поппера идейно связаны друг с другом. Например, работы в области социальной философии связаны с работами в области эпистемологии и философии науки.

Во-вторых, работы Поппера продемонстрировали сложность применения частотных теорий для объективного описания сингулярных ситуаций.

Частотные теории предназначены для анализа всего множества событий. В частотных теориях вероятности сингулярных событий не существуют. Единственная возможность для описания индивидуального события связана с назначением этому событию вероятности равной вероятности, которая назначена всему множеству событий.

Приписывание вероятности коллектива индивидуальному событию в общем случае не является корректной процедурой. Только в том случае, если нет никакой специфической информации об индивидуальном событии, этому событию можно назначить вероятность коллектива. Например, все исследуемые объекты занумерованы и кроме номера объекта ничего об объекте не известно. В общем случае кроме имени объекта о нем известна иная информация. Тогда при назначении индивидуальному событию коллективной вероятности возникают сложности.

В литературе эти трудности известны под названием статистического силлогизма. Для иллюстрации силлогизма мы используем популярный в западной литературе пример [77].

В Швеции 80 % протестантов.

Нильсон швед.

Следовательно, с вероятностью 80 % Нильсон является протестантом.

Действительно, если о Нильсоне известно только то, что он швед, то вывод закономерен. В то же время, если известно, что его родители католики или он атеист, то оценка о том, что он на 80 % протестант, является неправильной.

Статистический силлогизм является частным случаем проблемы назначения референтного класса для индивидуальных событий.

Для объективного задания сингулярной вероятности необходимо правильно выбрать референтный класс. Например, нас интересует вероятность того, что конкретный господин X, 40-летний житель Санкт-Петербурга, благополучно достигнет рубежа 41 года. Зная исключительно возраст господина X по таблицам смертности, особенно если они составлены для жителей Санкт-Петербурга, легко определить вероятность перехода X в разряд 41-летних людей.

Предположим, что господин A знает, что X является заядлым курильщиком и выкуривает две пачки в день. Тогда для правильного определения вероятности перехода X в разряд 41-летних людей нужны другие таблицы смертности или необходимо модифицировать таблицу смертности для некурильщиков.

Пусть некто господин B дополнительно к уже имеющейся информации знает, что X является бывшим спортсменом и круглый год раз в неделю играет в футбол. С учетом этого факта таблицы смертности для сорокалетних курильщиков необходимо корректировать.

Этот пример демонстрирует сложности объективного задания референтного класса.

Самым обоснованным способом корректного определения вероятностей считается способ наименьшего референтного класса. Предположим, что классы рассматриваемых событий подчиняются следующим теоретико-множественным отношениям:

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq S3, \ldots, Sm \subseteq S_m + {}_1.$$

Пусть вероятности попадания в выше перечисленные классы таковы:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, Pm, \ ,P_m + {}_1.$$

Наименьшим референтным классом является класс S_1. Тогда вероятность P_1 считается наиболее надежной вероятностью. Остальные вероятности P_2, P_3, … будут получены качественно, путем модификации вероятности P_1.

После Поппера появились разнообразные варианты теории склонностей. Наиболее известными работами в области теорий склонностей счиются работы самого Поппера, а также Миллера, Фетзера и Гиллеса [75–76; 78; 29]. Все теории можно классифицировать в зависимости от интерпретации условий проведения экспериментов.

В первом случае склонности связаны с количеством проводимых экспериментов. Здесь можно выделить два варианта. В первом варианте рассматриваются теории, в которых предполагается потенциально неограниченное число повторений эксперимента. Ввиду неограниченного числа повторений эти теории называются неограниченными теориями. Во втором варианте предполагается ограниченное число повторений эксперимента. Для этого случая теории называются сингулярными.

Два другие варианта теории склонностей являются метафизическими. Во втором случае изучение склонностей предполагает знание всего состояния универсума. В третьем случае условиям проводимых экспериментов приписывается каузальное влияние.

В раннем периоде творчества Поппер связывал изучение склонностей с анализом повторяющихся условий эксперимента. Для позднего Поппера склонности в физике – это свойства физической ситуации в целом и иногда указание направления изменений этой ситуации. Изменение попперовской интерпретации связано с попыткой получения объективного описания для сингулярных случаев.

Для Миллера склонности не локализованы ни в физических вещах, и ни в локальных ситуациях. Склонности зависят исключительно от текущей ситуации, но не от других ситуаций, как бы они ни были близки. Требование указания специфики ситуации – единственный путь для достижения объективации сингулярности.

Рассмотрим проблемы описания обратных вероятностей, которые являются значимыми для всех концепций теории склонностей: концепции повторяющихся условий, концепции знания состояния универсума и каузальной теории склонностей. Как известно в теории вероятностей, если задана вероятность события $P(A / B)$ и вероятность события B: $P(B)$, при этом $P(B) \neq 0$, и $P(A) \neq 0$, то существует обратная вероятность события: $P(B/A)$, определяемая следующим образом:

$$P(B / A) = P(AB) / P(A).$$

Обозначим через $Pr(X)$ склонность события X.

Рассмотрим в начале проблему инверсных вероятностей для теории повторяющихся условий на двух примерах.

Первый пример. Эксперимент заключается в бросании кости. Пусть событие A означает, что выпало четное число, а событие B символизирует выпадение шестерки.

Тогда $Pr(A / B) = 1$. В тоже время $Pr(B / A) = 1/3$.

События A и B происходят одновременно, поэтому здесь являются допустимыми как интерпретация повторяющихся событий, так и каузальная интерпретация.

Второй пример. На двух фабриках A и B производят игрушки. На фабрике A выпускают в сутки 800 игрушек, бракованные изделия составляют 1 %. На фабрике B производят 200 игрушек, бракованные изделия составляют 2 %.

Введем следующие обозначения: событие D означает, что игрушка является дефективной; событие M заключается в том, что изделие произведено на фабрике A; событие N заключается в том, что игрушка создана на фабрике B.

Вероятности $P(D / M) = 0{,}01$ и $P(D / N) = 0.02$ имеет ясный смысл. Вероятности $P(M / D)$ и $P(N / D)$имеют более сложную интерпретацию. Используя теорему Байеса, легко получить, что $P(M / D) = 2/3$, а $P(N / D) = 1/3$.

Естественная интерпретация этих результатов получается в рамках концепции повторяющихся условий. Пусть S означает условия проводимых экспериментов.

Тогда $D \wedge S$ означает условия проводимого эксперимента, при которых изготовлена бракованная игрушка. Отсюда следует, что $Pr(M / D \wedge S)$ означает склонность при неоднократно проведенных экспериментах бракованной игрушки быть изготовленной на первой фабрике.

В первые проблемы инверсных вероятностей, рассматриваемых в каузальном контексте, сформулировал П. Хэмпрейс [79]. Рассмотри эти проблемы на примере известного физического феномена испускания и отражения фотонов от зеркала, наполовину покрытого серебром.

Источник спонтанно излучаемых фотонов по отношению к зеркалу расположен так, что только часть частиц попадает на зеркало. Некоторая часть попавших на зеркало частиц отражается от зеркала, другая – поглощается.

Для описания феномена отражения введем следующие переменные: пусть Bt_1 означает испускание фотонов от источника в момент времени t_1; It_2 означает попадание фотона на зеркало в момент времени t_2; Ot_3 – отражение фотона от зеркала в момент времени t_3.

Введем следующие условные склонности:

1) $Prt_1(Ot_3It_2Bt_1) = p > 0$;

2) $1 > Prt_1(It_2 / Bt_1) = q > 0$;

3) $Prt_1(Ot_3 / \neg It_2Bt_1) = 0$.

Первое выражение означает, что произведенная в момент t_1 оценка склонности для отражения фотона в момент времени t_3, при условии испускания фотона в момент времени t_1 и попадания его в зеркальную поверхность в момент времени t_2, равна p.

Второе выражение означает, что произведенная в момент t_1 оценка склонности для попадания фотона в момент времени t_2, при условии испускания фотона в момент времени t_1, равна q.

Третье выражение означает, что оценка склонности отражения фотона при условии, что он не попал на зеркало, равна нулю.

Так как попадание фотона на зеркальную поверхность не зависит от последующего отражения фотона, то естественными представляются следующие равенства:

4) $Prt_1(It_2 / Ot_3Bt_1) = Prt_1(It_2 / \neg Ot_3Bt_1) = Prt_1(It_2 / Bt_1) = q < 1$.

Используя теорему о полной вероятности, оценим склонность отражения фотона при условии испускания фотона. Получаем

5) $Prt_1(Ot_3 / Bt_1) = Prt_1(Ot_3 / It_2Bt_1)* Prt_1(It_2 / Bt_1) + Prt_1(Ot_3 / \neg It_2Bt_1) * Prt_1 (\neg It_2 / Bt_1) = p*q$.

Используя принцип умножения условных вероятностей, получаем

6) $Prt_1(It_2Ot_3 / Bt_1) = Prt_1(It_2 / Ot_3Bt_1) * Prt_1(Ot_3 / Bt_1) = p*q**2$.

Теперь применим принцип умножения непосредственно к последнему выражению.

Получим

$Prt_1(It_2Ot_3 / Bt_1) = Prt_1(Ot_3 It_2 / Bt_1) = Prt_1(Ot_3 / It_2Bt_1) * Prt_1(It_2 / Bt_1) = p*q$.

Тогда $p*q = p*q**2$.

Отсюда равенство возможно при $p = 0$, или $q = 0$, или $q = 1$.

Это противоречит принятым допущениям 1и 2.

Используя допущения 1–3 и теорему Байеса, напишем склонность для следующего выражения:

$$Pr(It_2 / Ot_3Bt_1) = pq / (pq + 0) = 1,$$

в тоже время на основании условия 4 имеем

$$Pr(It2 / Ot3Bt1) = q < 1.$$

Таким образом, классические результаты теории вероятностей – теорема Байеса и принцип умножения для условных вероятностей применительно к описываемой физической системе – оказались нарушенными. Исследуемая нами ситуация относится к каузальной теории склонностей и вскрывает трудности этой теории.

Корректной является теория повторяющихся экспериментов, являющаяся в существенной степени частотной. Теория, связывающая условия проведения эксперимента со знанием всей картины мира, становится метафизической. Возникает вопрос: возможно ли объективное задание сингулярных вероятностей в нечастотной теории склонностей каким-либо конструктивным способом на основе вероятностных формализаций?

Объективистский нечастотный вариант теории склонностей был предложен Гиллесом [29]. Мотивация для развития этого направления основана на практике принятия обоснованных решений, которая опирается не на статистический материал, а на знание ситуации изнутри. Вот некоторые примеры, где решение принимается без использования статистических данных из работы Гиллеса [80].

Мы полагаем, что зрелый человек, знающий особенности своего характера, самостоятельно сообразит, что он послал письмо другу с ошибочным адресом. Весьма сомнительно, что в описываемом случае человеку поможет обнаружить ошибку статистическая информация о том, что в определенном проценте случаев люди посылают письмо без марки или с неправильно написанным адресом.

Еще один пример из собственной жизни Гиллеса, подтверждающий значимость принятия решений на нечастотных основаниях. Его родственница по линии жены итальянка, которой исполнилось 16 лет. В Италии модно покупать мотоцикл, достигнув 16-летия. Статистика инцидентов на дорогах свидетельствует, что молодые люди в возрасте 16 лет часто оказываются участниками инцидентов. В то же время племянница Гиллеса в 16 лет являлась вполне ответственным человеком. Поразмыслив, он решил не препятствовать ей в получении прав на вождение и в приобретении мотоцикла.

Гиллес полагает, что теория пропензити Поппера будет усовершенствована, если эта теория будет дополнена правилом фальсификации вероятностных суждений. Как известно, Поппер прекрасно понимал логическую несостоятельность фальсификаторов для вероятностных суждений. Основываясь на практических, прагматических соображениях, Фишер, Нейман и Пирсон в рамках раздела проверки гипотез разработали теорию построения фальсификаторов, аналогичную теории Поппера.

Гиллес предлагает дополнить теорию Поппера усовершенствованной им статистической методологией проверки гипотез по Нейману–Пирсону. Методология Гиллеса позволяет уменьшить критическую близость, тем самым уменьшая ошибку первого рода. Новации Гиллеса не затронули логику построения фальсификаторов, известную Попперу, и поэтому являются лишь техническим усовершенствованием подхода Неймана–Пирсона. Очевидно, такой вариант теории предрасположенностей не был бы принят Поппером.

По мнению Гиллеса, дополнительным аргументом в пользу его варианта теории предрасположенностей является то, что предлагаемая концепция позволяет дать формальное описание усиленного варианта первого закона, которому подчиняются эмпирические коллективы в теории Мизеса. Как известно, Мизес полагал, что вначале устойчивость частот будет зафиксирована в первом десятичном знаке дробной части. Например, все результаты эксперимента будут находиться в пределах от 0.52 до 0.54. При продолжении числа экспериментов устойчивость будет отражена во втором десятичном знаке. Предположим, начиная с некоторого момента времени все результаты будут находиться в границах от 0. 530 до 0.533.

Продолжая эксперименты, устойчивость оказалась зафиксированной в третьей значащей цифре после запятой. По Гиллесу, длительные эксперименты, проводимые представителями частотной теории, не являются необходимыми. Достаточно провести нужное число экспериментов, чтобы убедиться в устойчивости первой цифры, а дальнейшую экспериментальную работу осуществить с помощью математики.

Подход Гиллеса основан на использовании второй формы закона больших чисел, этот результат больше известен как теорема Муавра. Теорема Муавра доказывает, что биномиальное распределение асимптотически сходится к нормальному распределению. Сходимость достаточно высокая, считается, что при более 30 экспериментах нормальное распределение хорошо аппроксимирует биномиальное распределение. Биномиальное распределение естественно возникает при описании вероятности определенного числа успехов при проведении эксперимента в так называемой схеме Бернулли, состоящего в бросании монеты.

Используя нормальную аппроксимацию для фиксированного уровня значимости, обычно берут этот уровень, равный 5 %. При этом можно легко построить доверительный интервал для произвольного числа успехов. Далее для фиксированного числа успехов, и определенной вероятности успеха, с которой осуществляются эксперименты, строится доверительный интервал для числа успехов. Концепция Гиллеса не является адекватной частотным теориям по нескольким обстоятельствам.

Во-первых, в частотной парадигме настаивают на длительной проверке устойчивости, потому-то не существуют убедительные теоретические основания доказательства сходимости последовательности частот к пределу. В теориях пропензити полагают, что при длительном проведении экспериментов частоты будут сходиться к вероятностному пределу. В этих теориях предлагаются идеализированные основания для сходимости частот. Эти основания имеют в лучшем случае эпистемологичевкий, а не прагматический характер.

Во-вторых, вычислительная схема Бернулли предполагает, что проводимые эксперименты являются независимыми. В то же время в частотных теориях Рейхенбаха, Салмона и других представителей частотной концепции независимость экспериментов не является обязательным условием.

В-третьих, теория построения доверительных интервалов для параметров распределений предполагает, что концы интервалов, являются случайными числами. Это становится препятствием для применения теории. Как только фиксируются границы интервалов, говорить о вероятности (отличной от нуля и единицы) попадания параметра, являющегося константой, бессмысленно. Поэтому теория склонностей Гиллеса имеет некоторый эпистемологический интерес, в то же время предложенная им вычислительная схема неадекватна для частотных концепций и не имеет прагматической значимости.

От анализа концепций пропензити перейдем к рассмотрению субъективистских концепций. Наиболее популярным принципом задания исходных вероятностей в нечастотных концепциях является принцип индифферентности, к анализу которого мы и переходим.

§ 2. Принцип индифферентности: анализ оснований и применений

Во всех известных вероятностных интерпретациях связь теоретических и эмпирических терминов задается с помощью операциональных определений. В частотной интерпретации теоретический термин определяется с помощью частоты, в субъективистской концепции – с помощью ставочных коэффициентов, в логической и классической – с помощью принципа индифферентности.

Принцип индифферентности наиболее интригующий и спорный. С одной стороны, он является интуитивно ясным и на его основе получен некоторый вариант решения проблемы индукции. С другой стороны, в некоторых случаях этот принцип приводит к разнообразным парадоксам.

Настоящая работа посвящена анализу современных подходов, направленных на спасение принципа индифферентности. Считается, что теория вероятностей и математическая статистика решают задачи, противоположные по отношению друг к другу. Типичная задача теории вероятностей заключается в определении вероятности некоторого события, при условии, что заданы вероятности элементарных событий. Задачи, относящиеся к математической статистике, заключаются в определении базовых статистических характеристик объектов, таких как частота, среднее, дисперсия и др.

Несмотря на разделение труда, граница между этими дисциплинами не является закрытой. В частотной, логической, субъективистской и других интерпретациях теории вероятностей исследуется обоснованность методологических принципов определения вероятностей элементарных событий. Традиция исследования принципов определения базовых вероятностей начинается с первой концепции теории вероятностей, получившей название классической.

Первая концепция вероятности появилась благодаря карточным играм. Обычно считается, что творцами классического варианта теории вероятности являлись Б. Паскаль и П. Ферма. Сохранилась переписка этих математиков по решению двух задач. Переписка была инициирована известным игроком по имени де Мере. В своем письме к Ферма он формулирует вопросы, решение которых предполагает использование элементов комбинаторики и теории вероятностей. Шевалье задал два разных по трудности вопроса. Первый вопрос являлся элементарным: почему частота выпадения «девятки» при двух бросаниях шестигранной кости меньше выпадения числа 10? Второй – более трудный: как нужно разделить ставку между игроками при незаконченной игре? Ответы на эти и другие вопросы оказывали стимулирующее влияние на уточнение основных понятий классической концепции теории вероятностей [18].

Так как в карточных играх предполагается, что возможные результаты одинаково вероятны, обоснованность принципа индифферентности, с помощью которого назначают вероятности элементарным событиям в классической концепции, определяет в существенной степени обоснованность классической концепции теории вероятностей в целом.

Принцип индифферентности заключается в приписывании одинаковых вероятностей положениям дел и событиям, вероятности которых неизвестны количественно, и нет информации о том, какие положения дел более или менее вероятны.

Корректное определение равновероятных событий требует выявления этих событий без апелляции к понятию вероятности, ибо в противном случае определение понятия равновероятных событий будет осуществлено с помощью ошибки под названием логический круг.

Лаплас предложил определять равновероятные события посредством равновозможных событий. Равновозможные события определяются с помощью принципа индифферентности. По этому принципу произвольное число событий (два и более) являются равновозможными, если не существует оснований считать возможности появления любого события отличными от возможностей появления оставшихся событий. Равновозможные события по Лапласу являются равновероятными.

Существует несколько видов аргументации как в пользу, так и против принципа индифферентности. Все многообразие аргументации можно разделить на аргументы гносеологического, конструктивистского, прагматического и логического характера.

Гносеологическое обоснование опирается на три вида аргументов. Первый аргумент опирается на следующее соображение. Если неизвестны сравнительные вероятности для группы, состоящей из двух и более событий, то предлагается всем событиям назначать одинаковую вероятность, равную единице, деленной на число событий в группе. Этот аргумент трудно признать состоятельным, он исходит из незнания положения дел относительно вероятностей.

Второй аргумент опирается на идеи симметрии. Исходя из физической симметрии, все грани правильной шестигранной кости будут выпадать одинаково часто. Другая экспликация симметрии дается следующим определением [81]. Два события – A и B – являются равновероятными, а фактически совпадающими с точностью до меры нуль, если выполняются следующие условия:

$$P(A/B) = P(B/A) = 1,$$

при этом $P(A) \neq 1$ или $P(B) \neq 1$.

Третий аргумент исходит из того, что задание первоначальных вероятностей не играет существенной роли. Потому что, используя результаты опытов и пересчитывая вероятности с помощью теоремы Байеса, происходит нивелирование исходных вероятностей. На самом деле этот аргумент имеет силу, только если эксперимент продолжается бесконечно долго, что не имеет место в практике научных исследований.

Наибольшая критика принципа индифферентности связана с его неконструктивным характером. Критерий не имеет алгоритмического характера. Корректное применение принципа индифферентности на интуитивных основаниях не вызывает проблем только в простых ситуациях.

Например, в случае правильной кости выпадение «пятерки» равновозможно с появлением любой грани. В то же время событие, заключающееся в выпадении «шестерки», оказывается неравновозможным выпадению «не шестерки», потому что последнее событие реализуется пятью способами.

В более сложных ситуациях определение равновозможных событий на основе интуиции вызывает проблемы. Эти проблемы ярко представлены в известной задаче оппонента классической концепции Бертрана [71] . Задача Бертрана формулируется следующим образом. В трех столах, в каждом из которых находятся по два ящика, лежат монеты по одной в каждом ящике. В одном столе – две золотые монеты, в другом – одна золотая и одна серебряная, а в третьем – две серебряные. Случайным образом выбирается стол и ящик в этом столе, из него извлекается золотая монета. Возникает вопрос: какова вероятность вытащить из этого же стола вторую золотую монету?

Первое решение. По принципу индифферентности два следующие положения дел оказываются равновозможными. Первое – монета была вытащена из стола с двумя золотыми монетами, второе – монета взята из стола с одной золотой монетой. Поэтому с вероятностью 1/2 из выбранного стола будет вытащена вторая золотая монета.

Второе решение. Общее число равновозможных комбинаций равно 6. Эти возможности таковы: первая – выбор первого стола и выбор первого ящика из него; вторая – выбор первого стола и выбор второго ящика; третья – выбор второго стола и первого ящика; четвертая – выбор этого же стола и второго ящика; пятая – выбор третьего стола и первого ящика; шестая – выбор третьего стола и второго ящика. С тем, что была извлечена золотая монета при первом вытаскивании, совместимы три альтернативы.

Две из них способствую появлению второй золотой монеты. Поэтому вероятность появления золотой монеты при втором вытаскивании равна 2/3.

Разные способы определения равновозможных альтернатив приводят к разным ответам. Возникает вопрос: имеется ли в этих решениях правильное определение равновозможных событий? Если да, то какое решение правильное. Для того чтобы решить, какой способ выделения равновозможных событий является корректным, решим задачу с помощью теоремы Байеса. Вначале определим вероятность вытаскивания золотой монеты при первом вытаскивании.

Обозначим через A событие вытаскивания золотой монеты при первом эксперименте, а через Bi, i =1,3 – выбор стола с номером i. Тогда по формуле полной вероятности

$$p(A) = \sum p(B_i)*p(A / B_i) = 1/2,$$

здесь p(A) – вероятность события A, p(A / Bi) – вероятность извлечения белого шара из стола с номером *i*.

Пусть C – событие, заключающееся в вытаскивании второй золотой монеты. Тогда

$$p(C / A) = p(B_1) / p(A) = 2/3.$$

Теорема Байеса позволяет указать, что второе решение было правильным. Но это мало проясняет принципы определения равновозможных комбинаций.

В последнее время широкий интерес к проблеме выделения равновозможных событий вызван задачей о лотерее, которая была предложена Крейгом Вайтакером. Эта задача получила название проблема Monty Hall [13]. Монти – это имя ведущего в этой лотерее.

Условие задачи таково. За одной из трех дверей находится автомобиль. За каждой из двух других помещены козы. Игрок указывает на дверь, за которой, как он считает, находится автомобиль. Монти не открывает указанную игроком дверь, а открывает другую дверь, за которой находится коза. Возникает вопрос: где более вероятно находится автомобиль за дверью, на которую первоначально указал игрок, или за оставшейся дверью? Или иначе: имеет ли смысл изменить выбор или оставить выбор без изменений?

Первое решение предполагает идею симметрии. За одной дверью находится коза, за последней дверью – автомобиль. В силу принципа индифферентности, оба варианта равновозможны, поэтому нет смысла изменять выбор.

Другие решения не используют симметрию. Эти решения предполагают, что нахождение автомобиля за оставшимися дверями имеет не одинаковые вероятности. Существует несколько несимметричных вариантов решения.

Первый вариант несимметричного решения таков. Имеет место событие, заключающееся в том, что автомобиль находится за первой, второй или третьей дверями, обозначенными буквами A, B, C. Априорная вероятность того, что автомобиль находится за каждой из дверей, равна 1/3. Пусть игрок выбрал дверь C. Тогда $P(C) = 1/3$, а вероятность того, что автомобиль не находится за выбранной дверью,

$$P(B \cup A) = 2/3.$$

Предположим, что открыли дверь A и за ней находится коза. Тогда вероятность того, что автомобиль не находится за дверью C по-прежнему равна 2/3. Отсюда вероятность B равна 2/3. Поэтому имеет смысл изменить выбор.

Второй вариант несимметричного ответа представлен далее. Изложение решения упростится без потери общности, если будут приняты следующие допущения: за дверями A и B находятся козы, а за дверью C – автомобиль. Не зная, где находится автомобиль, игрок с вероятностью 1/3 выбирает любую дверь. Пусть игрок выбрал дверь A. Тогда Монти обязательно откроет дверь B. Если игрок откроет дверь B, то обязательно будет открыта дверь A. И последний вариант – выбрана дверь C, тогда будет открыта дверь A или дверь B.

У игрока возможны две стратегии. Первая стратегия заключается в сохранении выбора, а вторая – в изменении выбора. Рассмотрим эффективность стратегий при любом из трех вариантов выбора двери. Начнем с анализа стратегии верности первоначальному выбору. При выборе A игрок проигрывает, при выборе B – проигрывает и только при выборе C – выигрывает. Выигрышная стратегия заключается в отказе от первоначального выбора, так эта стратегия обеспечивает выигрыш с вероятностью 2/3.

Так же как и для задачи о вытаскивании золотой монеты, с помощью теоремы Байеса можно определить, какое решение является корректным. Применение теоремы показывает правильность несимметричных решений.

Критика логических оснований принципа индифферентности в наибольшей степени связана с так называемыми геометрическими вероятностями. Геометрические вероятности естественно возникают в связи с исследованием попадания случайно брошенной точки в определенную часть плоскостной или объемной фигуры. При анализе такого рода задач Бюффоном были обнаружены многочисленные парадоксы [18]. Проявление парадоксов заключается в следующем. При применении принципа индифферентности к одним свойствам геометрической фигуры, которые связаны с искомыми вероятностями, получается одно значение этих вероятностей, иные вероятности получаются на основе применения принципа индифферентности по отношению к другим свойствам этой фигуры.

В известной задаче Бюффона исследуется вероятность того, что случайно проведенная хорда в круге радиуса R будет больше стороны правильного треугольника XYZ, вписанного в эту окружность.

В первом решении из одной вершины треугольника, например Y, проводится перпендикуляр к стороне XZ, он пересекает эту сторону в точке W, далее осуществляется продолжение перпендикуляра до пересечения с окружностью. Центр окружности O соединяется с остальными двумя вершинами треугольника. Из треугольника XOZ легко получить, что длина OW равна R/2, где R – длина радиуса. Хорды, параллельные стороне треугольника XZ, на которую был опущен перпендикуляр, будут больше этой стороны, если они находятся в промежутке OW. Так как OW = R/2, а все возможные расположения хорд находятся в промежутке OC, равном радиусу круга, то поэтому вероятность того, что случайно проведенная хорда будет больше стороны треугольника, равна 1/2.

Во втором решении через одну вершину треугольника, например X, проводится касательная параллельно противоположной стороне треугольника. Касательная образует с окружностью угол в 180 °. Хорды, проведенные через точку A и имеющие длину больше стороны треугольника, находятся внутри данного треугольника. В правильном треугольнике все углы равны 60 °. Поэтому вероятность попадания случайно проведенной хорды в треугольник, а следовательно, вероятность того, что длина случайно проведенной хорды больше стороны треугольника, равна 1/3.

В третьем решении в треугольник XYZ вписана окружность с тем же центром радиуса R/2. Длина случайно проведенной хорды будет больше стороны правильного треугольника, если центр хорды попадает внутрь меньшей окружности.

Площадь большего круга равна πR^2, а меньшего круга – $\pi R^2/4$. Отсюда вероятность попадания центра хорды в меньший круг и соответственно вероятность того, что длина хорды больше, чем длина стороны вписанного в больший круг треугольника, равна 1/4 [30].

По мнению Бюффона, эти результаты свидетельствуют о неадекватности принципа индифферентности для множеств несчетной мощности. Напротив, Б. В. Гнеденко считает, что понятие случайной хорды не является точным, поэтому три различных подхода к определению искомой вероятности являются решениями трех различных задач. По нашему мнению, только первое решение является правильным, а остальные два неправильные. Первое решение использует одинаковое распределение множества хорд параллельных фиксированной стороне треугольника, перпендикулярных радиусу круга. Радиус круга и хорда – одномерные геометрические фигуры, поэтому радиус круга является естественной характеристикой для определения вероятности хорды. Остальные два решения для определения вероятности одномерной характеристики используют угловую характеристику и двумерную характеристику, поэтому первое решение является корректным.

Современный вариант парадоксов, связанных с применением принципа индифферентности для описания геометрических вероятностей, был предложен Ван Бас Фраазеном [14] . На фабрике производят кубики длина ребра, которых меняется случайным образом от 0 до 1 фута? Возникает вопрос: какова вероятность того, что длина ребра равняется половине фута. На основе принципа индифферентности получаем очевидный ответ: 0.5. В рамках данной задачи рассмотрим еще два вопроса.

1. Какова вероятность того, что площадь выбранного куба равняется 0.25? На основе принципа индифферентности все поверхности одинаково вероятны. Площади варьируют от 0 до 1. Поэтому вероятность того, площадь поверхности равна 0.25, будет численно равна 0.5.

Как отмечено ранее, вероятность случайного выбора кубика с длиной ребра 0.5 равна 0.5. В этом случае кубик будет иметь поверхность 0.25 с той же самой вероятностью 0.25, а не 0.5.

2. Какова вероятность того, что объем выбранного кубика, равняется 0.125? На основе принципа индифферентности объемы всех кубиков одинаково вероятны. Объемы варьируют от 0 до 1, поэтому вероятность того, объем куба равен 0.125 будет численно равна 0.5.

Применение принципа индифферентности для длины кубика дает вероятность получения кубика с объемом 0.125, равной 0.125. И наконец, применение принципа индифферентности для площадей при решении данной задачи дает ответ 0.25.

Наиболее серьезным контраргументом против респектабельности принципа индифферентности считается парадокс со смесями, предложенный Мизесом [11]. Даже наиболее последовательные апологеты этого принципа считают, что парадокс смеси показывает границы применимости этого принципа. Формулировка задачи, приводящей к парадоксу смеси вина–воды, такова. Имеется смесь вина и воды. Известно, что в этой смеси соотношение объемов компонентов три к одному. При этом неизвестно, какого вещества в этой смеси больше воды или вина. Другими словами, одинаково вероятно, что отношение объемов вина и воды равно как 3 : 1, так и 1 : 3. Требуется узнать, какова вероятность того, что соотношение объемов вина и воды меньше или равно двух.

Первое решение. Пусть X – объем вина и Y – объем воды в этой смеси. По условию задачи: $1/3 \leq X / Y \leq 3/1$. Требуется узнать вероятность $P(1/3 \leq X / Y \leq 2/1)$ того, что соотношение объемов вина к воде не больше чем два к одному.

Применяя принцип индифферентности, получаем, что искомая вероятность

$$P(1/3 \le X / Y \le 2/1) = (2 - 1/3)/(3 - 1/3) = 5/8.$$

Второе решение. Отношение $X / Y \le 2 : 1$ эквивалентно отношению $Y/X \ge 1 : 2$. Искомая вероятность равна вероятности $P(1/2 \le Y / X \le 3/1) = (3 - 1/2) / (3 - 1/3) = 15/16$.

Очевидная причина парадокса заключается в том, что соотношение объемов воды и вина описывается симметричным образом: $1/3 \le X/Y \le 3/1$, аналогично $1/3 \le Y / X \le 3/1$; и в тоже время определяются вероятности несимметричных соотношений: $P(1/3 \le X / Y \le 2/1)$ и $P(1/2 \le Y / X \le 3/1)$.

Парадокс не будет иметь место, если решаемая задача может быть редуцирована к исследованию вероятностей симметричных формализаций. Принцип индифферентности может быть оправдан, только если он применяется для симметричных описаний.

В недавней работе был предложен новый подход к решению парадокса вина и воды за счет перехода от относительных вероятностей к абсолютным вероятностям [12]. Будем полагать, что вино и вода не смешаны произвольным образом, а упорядочены так, что вино находится на дне сосуда. Как и прежде, будем полагать, что $1/3 \le X / Y \le 3/1$. Перейдем от анализа относительных отношений величин X / Y и Y / X к анализу абсолютных отношений $X / (X + Y)$ и $Y / (Y + X)$. Из соотношения $1/3 \le X / Y \le 3/1$, получаем, что:

$$1:4 \le X / (X + Y) \le 3 : 4.$$

Из соотношения $X/Y \le 2:1$, получаем, что:

$1:4 \le X / (X + Y) \le 2 : 3$.

Общая вариабельность отношения $X / (X + Y)$ равна $1/2$, а для частного анализируемого в данной задаче случая, вариабельность этого отношения равна $5/12$. Отсюда

$P(1 : 4 \le X / (X + Y) \le 2 : 3) = 5/6$.

Для того чтобы убедиться в том, что апелляция к абсолютным вероятностям не приводит к парадоксу, необходимо получить вероятность неравенства $P(Y / (X + Y)) > 1/2$.

Исходя из области определения рассматриваемого соотношения и переходя к абсолютным соотношениям, получаем

$$P(1 : 3 \le P(Y / (X + Y)) \le 3:4) = 5/6.$$

Данное решение имеет два очевидных достоинства. Во-первых, снимается самый тяжелый парадокс принципа индифферентности. Во-вторых, вопреки критике оппонентов этого принципа, предложенное решение не является усреднением известных решений. Действительно, $5/6 \ne 1/2*(5/8 + 15/16)$.

Недостатком решения является то, что предложенное решение соответствует задаче о разделении смесей, а не о смеси как таковой. Фактически исследован частный случай задачи о смеси. Тем не менее решенная задача близка к исходной, поэтому можно считать, что тяжелый контраргумент против принципа индифферентности не является обоснованным.

В настоящее время ведутся интенсивные исследования принципа индифферентности. Это связано с различными обстоятельствами. Во-первых, потребность в его применении имеет место в различных концепциях, в том числе в логической и субъективистской. Во-вторых, не существует решающих аргументов против этого принципа. В частности, дано решение задачи о смеси в первом приближении, а эта задача считалась серьезным контраргументов против корректности принципа индифферентности. В-третьих, для некоторых ситуаций предложена конструктивная интерпретация этого принципа с помощью построения равновозможных событий А и В на основе формальной экспликации симметричных событий: $P(A / B) = 1$ и $P(B / A) = 1$.

В-четвертых, признание обоснованности принципа индифферентности является серьезным аргументом против юмовского скептицизма о невозможности обоснованных индуктивных процедур и индуктивной логики. Это имеет важное философское и историческое значение для положительного решения проблемы индукции. Как известно принцип индифферентности и решение одной задачи, связанной с индуктивными процедурами были предложены Лапласом, современником Юма. Эта задача заключается в следующем. В урне находится n шаров белого и черного цветов. Неизвестно, в каком соотношении представлены черные и белые шары. Случайным образом вытащили s шаров, среди них оказалось r белых шаров. Выборка осуществляется без возвращения выбранных шаров в урну. Ставится вопрос о вероятности появления белого шара при следующем вытаскивании шара.

Решение и анализ решения этой задачи широко представлены в философской литературе [82]. В результате многократного применения принципа индифферентности по отношению к числу извлеченных белых шаров и по отношению к общему числу белых шаров в урне Лаплас получил, что вероятность извлечения белого шара на следующем шаге равна:

$$p = (r + 1) / (s + 2).$$

Решение Лапласа математически корректно. Методологические принципы Лапласа – это синтез байесовского субъективизма и априоризма. Фактически Лаплас не опирается на эксперимент. Предполагается одинаково возможное распределение числа белых шаров как среди выбранных, так и среди оставшихся шаров.

В настоящее время решение Лапласа не может быть признано методологически состоятельным, так как принцип индифферентности полностью игнорирует результаты, полученные в ходе испытаний, не является конструктивным и его применение приводит к не решенным парадоксам, в частности парадоксу смеси вина и воды. Вопреки заявлению Миккельсона о решении парадокса, его подход не обеспечивает окончательное решение парадокса.

В действительности подход Миккельсона существенно раздвигает границы корректного применения принципа индифферентности для ситуации, описанной в парадоксе смеси. Раньше наиболее общий принцип избегания парадокса заключался в применении принципа индифферентности исключительно для симметричных описаний. Подход Миккельсона позволяет применять это принцип и для несимметричных ситуаций, но при этом обязательно вода и вино должны быть разделены. Тем не менее методология Миккельсона обеспечивает решение проблемы в важном частном случае.

В настоящее время самыми обоснованными сферами применения принципа индифферентности остаются симметричные положения дел. Развитие формализованных экспликаций и конструктивных процедур получения симметричных положений дел дает основания для корректного выделения равновозможных событий. Это является аргументом для позитивного решения проблемы индукции, по крайней мере, для частных ситуаций.

Принцип индифферентности не является единственным способом задания исходных вероятностей. Существуют другие способы задания исходных вероятностей, и способы пересчета вероятностей при получении новой информации. Эта тематика будет рассмотрена в следующем параграфе.

§ 3. Методологический анализ аксиоматики и принципов изменения субъективистских вероятностей

В настоящее время субъективистские концепции теории вероятностей являются очень популярными как среди методологов в области теории вероятностей, математической и прикладной статистики, так и среди математиков и специалистов в области различных наук, использующих вероятностные методы. Популярность субъективистской концепции связана с рядом обстоятельств.

Во-первых, с ограниченностью объективистских теорий. Как известно, объектами для изучения объективистских теорий являются множества событий, а не отдельные явления. Так, популярная среди математиков и наиболее развитая в математическом отношении фишеровская математическая статистика является наукой о массовых явлениях. В объективистских теориях вероятностей Мизеса и Рейхенбаха изучаются специальные множества, так называемые коллективы. Применение объективистских теорий является легитимным и обоснованным только по отношению к множествам событий, их использование для анализа единичных событий не является обоснованным.

Во-вторых, субъективистские концепции специально предназначены для анализа степеней веры индивидуумов, поэтому их исследование имеет как практическую, так и теоретическую значимость.

В-третьих, математический аппарат субъективистских концепций, в частности байесовской теории, является достаточно совершенным. Поэтому байесовская методология применяется для анализа известных философских проблем, в частности проблемы Дюгема–Куайна.

При всем разнообразии субъективистских концепций и решаемых в них задачах несколько проблем являются общими для всех направлений. Первая проблема связана с корректным заданием субъективистских вероятностей. Вторая – направлена на исследование адекватности субъективистских вероятностей аксиоматике Колмогорова. Третья – предназначена для исследования изменения степеней уверенности.

Первая проблема частично рассмотрена нами в параграфе, посвященном принципу индифферентности, вторая и третья – являются до сих пор актуальными. Данная работа посвящена анализу различных подходов, обосновывающих изменение степеней веры, а также исследованию адекватности аксиоматики Колмогорова для субъективных вероятностей. Почему важны исследования, посвященные проверке адекватности субъективных вероятностей аксиоматике Колмогорова?

Положительный ответ об адекватности субъективных вероятностей аксиоматике означает определенную близость объективистских и субъективистских интерпретаций и дает возможность легитимного использования мощного аппарата колмогоровской теории вероятностей.

В этой работе мы стремимся показать, что не существует решающих аргументов как за адекватность субъективных вероятностей аксиоматике Колмогорова, так и против их адекватности. Имеет смысл говорить не об абсолютной адекватности или неадекватности, а скорее о сравнительной силе аргументов за или против. Аналогичная картина, по нашему мнению, имеет место и для аргументации о разных критериях пересчета субъективных вероятностей.

Проблема описания субъективных вероятностей в существенной степени решена создателями субъективистской концепции Рамсеем и де Финетти. Поэтому ей уделено минимальное внимание, необходимое для анализа исследуемых в статье проблем.

1. Задание субъективистских вероятностей. В субъективистском подходе существуют два направления. В первом направлении, предложенном Рамсеем и де Финетти, степени уверенности численно измеряются с помощью ставок при заключении пари. Во втором подходе, который был предложен Рамсеем, степени уверенности оцениваются с помощью понятия ожидаемой полезности. Рассмотрим основные идеи этих направлений.

а) Степени уверенности и коэффициенты ставок. Пари на событие A – это контракт между одним участником пари, утверждающим, что это событие произойдет, и ставящим R условных единиц в пользу этого, и другим участником, утверждающим, что событие A не произойдет, и ставящим Q единиц за то, что A не произойдет. Отношение R / Q это шансы выиграть у игрока, утверждающего, что произойдет A. Шансы выиграть в нормализованной форме выражаются следующим образом:

$$\rho = R / (R + Q).$$

Выражение R + Q называется ставкой.

Рамсей первым предложил измерять степени уверенности с помощью ставок при заключении пари [81]. Пусть некто согласен сделать ставку 1:5 в пользу того, что при бросании кости выпадет число 6. Тогда степень уверенности в том, что это событие произойдет, равна 1 / (1 + 5) = 1/6.

b) Субъективные вероятности и ожидаемая полезность. Понятие ожидаемой полезности рассмотрим на следующем примере. Пусть путник доходит до пересечения дорог. Он не знает точно, какая из дорог правильная, и, выбрав одну из них, идет по выбранному пути. Предположим, что на пересечении дорог путник видит движущегося пешехода. Возникает вопрос: как измерить степень уверенности путника в выбранном маршруте?

Степень уверенности измеряется расстоянием, которое необходимо пройти путнику, для того чтобы он смог убедиться в правильности или неправильности выбранного им маршрута. Пусть расстояние от путника до пересечения дорог равно d. Тогда f(d) – усилия путника, необходимые для того, чтобы пройти расстояние d. Предположим, что преимущество от достижения нужного пункта назначения равно r, потери от прибытия в неверное место измеряются w.

Тогда степень уверенности определяется готовностью путника пройти расстояние d, для того чтобы проверить, находится ли он на правильном пути, и определяется следующей формулой [83]:

$$p = 1 - f(d) / (r - w).$$

Для формального определения субъективной вероятности на основе ожидаемой полезности вводится понятие этически нейтрального события. Формально этически нейтральное событие, имеющее вероятность 1/2, определяется в работе [83] следующим образом: «О субъекте говорят, что он имеет степень веры 1/2 в некоторое утверждение, если он не имеет предпочтений между двумя выборами (1) α, если p ложно, β, если p истинно, и (2) α, если p истинно, β, если p ложно, но имеет предпочтение между α и β».

На основе этически нейтральных событий предлагается алгоритмическое определение степеней полезности произвольных событий. Пусть X и Y – два состояния дел, одно из которых предпочтительнее, чем другое. Предположим, что X предпочтительнее, чем Y. Назначим X вещественным числом x, а Y – вещественныме числом y, таким, что x > y. Пусть C этически нейтральное событие, и пусть связь между состояниями дел X и Y описывается следующим образом.

Выбираем X, если C истинно, Y, если нет. (1)

Пусть субъект не имеет предпочтений между выбором положений дел по формуле (1) и выбором положения дел Z, полезность которого необходимо измерить. Тогда полезность Z естественно определять следующим образом:

$$z = (x + y) / 2.$$

Полезность положений дел, находящихся между x, y и z, интерполируется аналогичным образом. На основе определения полезностей положений дел определяются степени веры в эти положения дел. Рамсей определяет степени веры как отношения полезностей следующим образом.

Пусть субъект безразличен между выбором положения дел X, и выбором положения дел, описываемого следующим образом:

$$\text{Y, если A, Z, если нет.} \quad (2)$$

Тогда степень веры p(A) в суждение A, определяется следующим образом:

$$p(A) = (u(X) - u(Z)) / (u(Y) - u(Z)),$$

здесь u означает полезность соответствующего положения дел. Степень веры не зависит от самих положений дел X, Y и Z, а определяется отношением их различий.

2. Проблема адекватности субъективистских вероятностей аксиоматике Колмогорова. Приведем аксиомы теории вероятностей Колмогорова в виде, удобном для сравнения с аксиомами, описывающими субъективные вероятности. Приведенная ниже вторая аксиома не является аксиомой Колмогорова [19].

1) $P(A) \geq 0$;
2) $P(\Omega) = P(A) + P(\neg A) = 1$;
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, при условии, что $P(A \cap B) = 0$;
4) $P(\sum_{i=1}^{\infty} Ai) = \sum_{i=1}^{\infty} P(Ai)$.

Первая аксиома утверждает неотрицательность вероятностей событий. Вторая – говорит о том, что сумма вероятностей противоположных событий равна единице. Третья – утверждает аддитивность суммы вероятностей для конечного числа событий. Четвертая – свидетельствует об аддитивности суммы вероятностей для счетного числа событий:

1) адекватность субъективных вероятностей первой аксиоме является очевидной;

2) аксиома о сумме вероятностей противоположных событий.

Адекватность аксиомы исследуем с помощью понятия субъективной уверенности, измеряемой ставочными коэффициентами. Два игрока A и B играют в игру, которая состоит из двух пари на события E и $\neg$E.

Пусть игрок A обладает степенью уверенности 4/5 в то, что произойдет событие E. Тогда он должен решиться на пари 4 : 1. Пусть степень веры игрока A в то, что произойдет противоположное событие $\neg$E, равна 2/5. Тогда он должен решиться на пари 2 : 3. Предположим, что рассмотренные условные единицы означают доллары. Пусть произошло событие E, тогда игрок A по первому пари выигрывает доллар, по второму пари он поигрывает 2 дол., так событие $\neg$E не произошло.

Теперь предположим, что произошло событие $\neg$E, тогда игрок A по первому пари он проигрывает 4 дол. По второму пари он выигрывает 3 дол. В любом случае он проигрывает один доллар. В рассмотренном примере сумма степеней веры игрока A равняется 4/5 + 2/5 = 6/5. Таким образом, в честной игре сумма ставочных коэффициентов для противоположных событий должна равняться единице.

3. Аксиома аддитивности суммы вероятностей для конечного числа событий. В соответствии с двумя способами задания субъективных вероятностей возможны два подхода к обоснованию справедливости аксиомы. Первый метод основан на использовании понятия справедливая ставка. Пусть A и B – два взаимно исключающих друг друга утверждений. Построим функции выбора X и Y [84]:

X = 1, если A, 0 в противном случае;

Y = 1, если B, 0 в противном случае.

Функция выбора для суммы X и Y имеет следующий вид:

X + Y = 1, если $A \cup B$, 0 в противном случае.

Пусть честная ставка при заключении пари на справедливость суждения X равна p.

Аналогично, пусть честная ставка при заключении пари на справедливость суждения Y равна q. Тогда ставочный коэффициент для суждения A равен p, а для суждения B равен q. Полагая, что ставка для суммы X и Y равна сумме ставок для X и Y, получаем, что p + q справедливая ставка для суждения X + Y = 1, если $A \cup B$, 0 в противном случае p + q – справедливая ставка для суждения X + Y = 0. Откуда p + q справедливый ставочный коэффициент для A ∪ B.

Приведенная аргументация не решает окончательно вопрос об адекватности аксиомы. Доказательство конечной аддитивности коэффициентов ставок опирается на конечную аддитивность суммарной ставки. В то же время, как показано Шиком [85], аддитивность для суммарной ставки не всегда имеет место.

Аксиома аддитивности на основе понятия ожидаемой полезности. В этом подходе, для того чтобы описать субъективистскую вероятность посредством ожидаемой полезности, необходимо априори знать искомую субъективистскую вероятность, потому что ожидаемая полезность P является математическим ожиданием функции распределения субъективистских вероятностей. Получается логический круг. Круг преодолевается в работах Рамсея [83], в которых ожидаемая полезность определяется непосредственно, без привлечения субъективных вероятностей. Приведенную аргументацию трудно признать окончательной, она в той степени основательна, в какой является корректным понятие ожидаемой полезности Рамсея. Большинство специалистов полагают, что аргументы в пользу конечной аддитивности более обоснованны, чем доводы противников аксиомы конечной аддитивности.

4. Аксиома счетной аддитивности. Наибольшее число дискуссий посвящено анализу адекватности аксиомы счетной аддитивности для описания субъективных вероятностей. Вначале рассмотрим аргументы против этой аксиомы.

Острую критику аксиома счетной аддитивности получила в работах создателя субъективной концепции теории вероятностей де Финетти [86; 87]. Рассмотрим аргументы де Финетти на примере следующей задачи. Пусть некий игрок задумал натуральное число. Другому игроку предлагается с помощью субъективных вероятностей, подчиняющихся аксиоме счетной аддитивности, описать собственные степени уверенности для числа, которое задумал первый игрок.

Аргументы против аксиомы счетной аддитивности представлены ниже.

а) Использование равномерного распределения. Предположим, что предпочтения первого игрока неизвестны. Тогда все числа, которые мог задумать первый игрок, являются для второго игрока одинаково вероятными. Для описания равновероятных чисел используется равновероятное распределение.

Если чисел конечное число n, то каждое число n получает одинаковую вероятность 1/n. Возникает вопрос: как задать вероятность для счетного числа объектов? Пусть p_i – вероятность того, что было задумано число i. Если $p_i > 0$, то сумма вероятностей всех событий будет больше единицы и тем самым нарушается аксиома Колмогорова о том, что сумма вероятностей всех событий должна быть равна единице. Если $p_i = 0$, то в этом случае сумма вероятностей всех событий будет равна нулю.

b) Моделирования степеней уверенности с использованием идеи нестандартного анализа Робинсона [62]. В нестандартном анализе строятся числа, являющиеся большими, чем нуль, но меньшими, чем любое положительное число. Несмотря на интенсивное развитие нестандартного анализа, конструкция гипердействительного числа является, тем не менее экзотической, теоретической конструкцией.

c) Принцип индифферентности. Предположим, что каким-то образом корректно и вполне прагматично степени уверенности описаны с помощью равномерного распределения. Это означает применение принципа индифферентности, открытого Лапласом. Применение этого принципа приводит к многочисленным парадоксам, наиболее серьезными являются парадоксы Бертрана [71].

d) *Сопоставление результатов, достигаемых на основе конечной аддитивности и счетной аддитивности.* Аксиома счетной аддитивности является популярной у математиков после работ Колмогорова, посвященных аксиоматизации и обоснованию теории вероятностей. Целесообразность аксиомы счетной аддитивности связана с тем, что все фундаментальные теоремы теории вероятностей, такие как теорема закона больших чисел, доказаны с использованием аксиомы счетной аддитивности. Как пишет Уильямсон, критикуя значимость этой аксиомы, Чен предлагает доказательство строгого закона больших чисел на основе аксиомы конечной аддитивности [88, с. 415]. С другой стороны, де Финетти показал недостаточность счетной аддитивности для доказательства ряда теорем. Доказательства оказались возможными на основе более широкого понятия, так называемой безупречной аддитивности. Безупречная аддитивность используется для множеств, имеющих мощность более чем счетная. Безупречная аддитивность совпадает со счетной аддитивностью для счетных множеств и равна нулю для счетных подмножеств несчетного множества.

Далее приведены аргументы в пользу счетной аддитивности.

a) Келли наделяет эту аксиому эпистемологическим статусом [96]. Эта аксиома используется при доказательстве теорем о сходимости, например при доказательстве центральной предельной теоремы. Асимптотические результаты свободны от критики в связи с проблемой недоопределенности теоретических результатов эмпирическими данными [89].

b) Доказательства всех фундаментальных теорем теории вероятностей, таких как теорема закона больших чисел, центральная предельная теорема и других, используют аксиому счетной аддитивности.

c) Третий и наиболее убедительный аргумент был предложен Уильямсоном [88]. Он показал, что аксиома счетной аддитивности степеней доверия является необходимым и достаточным условием для доказательства теоремы о так называемых голландских условиях пари. Утверждение о том, что степени веры удовлетворяют аксиоматике Колмогорова, называется теоремой о голландских условиях пари [71].

Пусть $A = \{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ – множество взаимно исключающих суждений;

Пусть Q_i – ставочный коэффициент для утверждения I;

Δi – направление ставки, эта величина равна +1 или -1;

S_i – ставка на суждение a_i. Если суждение a_i оказывается справедливым, то игрок возвращает сумму ΔiSi.

Для упрощения рассуждений без потери общности будем считать, что для всех i: $S_i = S$.

Потеря игрока от неправильной оценки суждения a_k имеет следующий вид:

$$L_k = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i\Delta_i S_i - \Delta_k S_k. \qquad (3)$$

Теорема о голландских условиях пари будет доказана, если будет получено, что $Lk \leq 0$ для некоторого k тогда, и только тогда когда имеет место аксиома счетной аддитивности степеней доверия:

$$\sum_{i=0}^{\infty} Q_i = 1. \qquad (4)$$

Доказательство необходимости условия (4) использует метод от противного. Предположим, что условие (4) не имеет место. Тогда верно неравенство

$$\sum_{i=0}^{\infty} Q_i < 1. \qquad (5)$$

Принимается естественное предположение, что ставки являются конечными. Тогда $L_k < \infty$. Откуда получаем, что

$$C = \left| \sum_{i=0}^{\infty} Q_i\Delta_i S_i \right| < \infty. \qquad (6)$$

Опуская несложные промежуточные преобразования, получаем, что $L_k > 0$ для данного k. Предположение о невыполнимости аксиомы счетной аддитивности привело к обязательному проигрышу. Следовательно, верно обратное предположение о выполнимости аксиомы.

Достаточность условия (4) для доказательства теоремы о голландских условиях пари.

Пусть условие (4) имеет место. Тогда

$$\sum_{i=0}^{\infty} Q_iL_i = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i[\sum Q_j\Delta_jS_j - \Delta_iS_i] = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i \sum_{i=0}^{\infty} Q_j\Delta_jS_j - \sum_{i=0}^{\infty} Q_i\Delta_iS_i =$$

$$1 * \sum_{i=0}^{\infty} Q_j\Delta_jS_j - \sum_{i=0}^{\infty} Q_i\Delta_iS_i = 0.$$

Так как все $Q_i \geq 0$ и $Q_k > 0$ для некоторого k, то $L_k \leq 0$ для этого k, что и требуется доказать.

Кратко суммируем аргументы против счетной адекватности:

1) не существует конструктивного описания субъективных вероятностей с помощью равномерного распределения;

2) описание предпочтений с помощью нестандартного анализа имеет только теоретическую значимость;

3) если возможно описание субъективных вероятностей с помощью равномерного распределения, то оно приводит к парадоксам, связанным с принципом индифферентности;

4) аксиома счетной аддитивности не нужна для доказательства многих теорем. Достаточно аксиомы о конечной аддитивности.

Анализ убедительности аргументации:

1) для некоторых частных случаев возможно задание равномерного распределения для счетного числа событий, например, путем разбиения счетного множества событий на конечное число групп и приписывания одинаковой, конечной вероятности каждой группе;

2) методы нестандартного анализа широко используются за пределами нестандартного анализа, например, в математической физике, теории вероятностей и других математических дисциплинах. Поэтому конструкции нестандартного анализа имеют не только теоретическую значимость, но и прагматичную значимость;

3) существуют успешные попытки решения парадоксов, связанных с принципом индифферентности;

4) последний аргумент свидетельствует, что использование аксиомы не решает всех проблем. Это не является свидетельством ненужности аксиомы, потому что не существует универсальных методов решения проблем.

Кратко суммируем аргументы в пользу счетной адекватности:

1) аксиома имеет эпистемологический статус, так как она используется при доказательстве теоремы закона больших чисел. Аксиома позволяет избежать проблемы недоопределенности теоретического знания;

2) аксиома счетной аддитивности степеней доверия является необходимым и достаточным условием для доказательства теоремы о голландских условиях пари.

Анализ убедительности аргументации:

a. В работах Алимова и Резникова [6; 10] показано, что теорема закона больших чисел не имеет ни особой эпистемологической, ни особой прагматической значимости.

b. Доказательство Уильямсона проведено при не очень естественных предположениях. С одной стороны, рассматривается пари с бесконечным числом ставок, с другой стороны, все ставки являются конечными.

Принципы изменения вероятностей. Согласно теореме о голландских условиях пари, не только субъективные вероятности должны удовлетворять аксиоматике Колмогорова, но и изменения вероятностей должны производиться с использованием теории вероятностей. Существует несколько подходов для описания изменений субъективных вероятностей. Первый подход основан на использовании байесовской методологии. В рамках этой методологии выделяется несколько направлений.

Первое направление носит название кондитионализации, от английского слова condionalization. Рассмотрим на примере основные идеи кондитионализации. Пусть субъективные вероятности для событий A, B и $A \wedge B$ соответственно равны P(A), P(B) и $P(A \wedge B)$. Предположим, что новая вероятность P'(A) события A стала равна единице. Согласно концепции кондитионализации необходимо изменить вероятность события B.

Новая вероятность: P'(B) = P(B / A).

Радикальная кондитионализация заключается в пересчете вероятностей всех предложений, выразимых в используемом языке.

Второе направление носит название кондитионализации Джефри. В отличие от обычной кондитионализации, новая вероятность P'(A) события A не равна единице. С учетом этого новая вероятность P'(B) события B равна

$P'(B) = P(B / A)*P'(A) + P(B / \neg A)*P'(\neg A)$.

В частном случае, когда P'(A) = 1, то оба подхода совпадают.

Оба рассмотренных подхода являются примерами синхроничной кондитионализации, когда все рассматриваемые события не разделены во времени. Изменения вероятностей событий разделенных во времени описываются посредством асинхронной кондитионализации. Наиболее известный вариант асинхронной кондитионализации был предложен Бас Ван Фраазеном [90]. Схема Фраазена носит название рефлексивного принципа и имеет следующую формальную реализацию:

$$P_t(Q / P_{t+x}(Q) = b) = b. \qquad (7)$$

Согласно рефлексивному принципу, степень доверия суждению Q в момент времени t должна равняться b, если известно, что в более поздний момент времени t + x степень доверия суждению Q будет равна b.

Для дальнейшего анализа необходимо сформулировать условия неадекватности теореме о голландских условиях пари, если при заключении пари применяется принцип рефлексии. Будем полагать, что сложное пари неадекватно теореме о голландских условиях пари, если это пари, состоящее из нескольких простых пари, ведет к форсированному проигрышу при условии, что каждое простое пари является честным. Рассмотрим обоснованность аргументов в пользу и против принципа рефлексии, используя примеры из работы [91].

Пример в пользу принципа рефлексии. Пусть игрок А сегодня присваивает низкую вероятность 0.25 событию, состоящему в том, что завтра будет дождь, зная, что завтра этому событию он назначит более высокую вероятность 0.5. Тогда формальная запись убеждений игрока А имеет следующий вид:

$$P_0(R / P_1(R) = 0.5) = 0.25. \tag{8}$$

Здесь R символизирует событие, что будет дождь. $P_1(R)$ – вероятность дождя в момент времени, равному единице, а $P_0(R)$ – вероятность дождя в более ранний нулевой момент времени. Для того чтобы условная вероятность, определенная выражением (8), имела смысл, необходимо, чтобы вероятность события, вычисляемого по формуле (9),

$$P_0(P_1(R) = 0.5) \tag{9}$$

не равнялась нулю. Пусть игрок А считает, что это событие имеет вероятность 0.20.

Тогда имеем

$$P_0(P_1(R) = 0.5) = 0.20. \tag{10}$$

Используя суждения (8) и (10), игроки А и В заключили сложное пари, состоящее из нескольких игр.

Первая игра состоит в пари на то, что игрок А завтра назначит вероятность 0.5 событию, состоящему в том, что будет дождь. Игрок А выигрывает, если он назначит завтра вероятность 0.5 тому, что будет дождь. В противном случае выигрывает игрок В. Согласно утверждению (10), честная ставка будет 2$ игрока А против 8$ игрока В.

Вторая игра связана с первой игрой. Вторая игра состоится только в том случае, если игрок А действительно назначит завтра вероятность 0.5 тому, что будет дождь. В противном случае вторая игра невозможна. Игрок А выигрывает, если дождя не будет, игрок В выигрывает, если будет дождь. Согласно утверждению (8), честная ставка будет для игрока А 30$ против 10$ второго игрока.

Третья игра связана с первой и второй игрой. Она возможна, если игрок А назначил завтра вероятность 0.5 тому, что будет дождь. Пари заключается на то, что будет дождь. Игрок А выигрывает, если будет дождь, в противном случае выигрывает соперник. Согласно работе [99], честная ставка будет 20$ против 20$.

Согласно условиям пари, итоги всех игр становятся известными на следующий день. Предположим, что игрок А не назначил событию, заключающемуся в том, что будет дождь вероятность 0.5. В этом случае игрок А проигрывает 2$ и остальные игры невозможны.

Другой вариант: пусть игрок А назначил вероятность 0.5 событию тому, что будет дождь. Тогда по первому пари игрок А выигрывает 8$. Итоги второй и третьей игры связаны с оцениванием вероятности того, что будет дождь или дождя не будет.

Предположим вначале, что будет дождь. Тогда по второй игре игрок В выигрывает 30$ и по третьей игре В проигрывает 20$. В итоге игрок В выигрывает 30$, проигрывает 28$ и общий выигрыш В 2$.

Наконец, предположим, что дождя не будет. И в этом случае игрок В выигрывает 2$.

По мысли автора [91], данный пример свидетельствует в пользу значимости рефлексивного принципа. Равенства (8) и (10) свидетельствуют о том, что субъективные вероятности игрока А не удовлетворяют данному принципу, и, хотя все три игры являются честными, игрок А форсированно проигрывает при любом течении событий.

Критика аргументации в пользу принципа рефлексии.

Во-первых, второе и третье пари заключены на основе аргументов в определенном смысле противоречащих друг другу. Во втором пари анализ ситуации осуществлен с точки зрения текущего момента времени. Событие, относящееся к более позднему моменту времени и заключающееся в том, что завтра вероятность появления дождя будет равна 0.5, учитывается формальным образом. В третьем пари анализ осуществлен с точки зрения более позднего момента времени. То же самое событие, что и во втором пари, учитывается содержательным образом. Поэтому совместное заключение второго и третьего пари представляется неразумным и не ведет к честной игре.

Во-вторых, пусть ставки принимаются с учетом принципа рефлексии. Тогда формула (8) будет изменена следующим образом:

$$P_0(R / P_1(R) = 0.5) = 0.5. \qquad (8')$$

В этом случае игра не будет справедливой для игрока В, он проиграет по первому пари, по второму и третьему пари будет паритет.

Примеры, в которых принцип рефлексии не имеет места, приведены ниже.

1. Предположим, что вероятность события А не может быть больше, чем 0.9. Тогда, вопреки принципу рефлексии, вероятность того, что $P(P(A) = 0.95) = 0$, а не 0.95.

2. Предположим, что под влиянием некоторых веществ безвредных для организма человек на короткое время верит, что он обладает фантастическими возможностями, например умеет летать. Предположим, что через час человек будет верить в умение летать с вероятностью 0.99. Тогда, вопреки принципу рефлексии, в текущий момент времени вероятность того, что через час испытуемый будет иметь степень уверенности в умении летать, равную 0.99, будет равняться нулю, а не 0.99.

Таким образом, не существует окончательных аргументов как за, так и против адекватности субъективных вероятностей системе аксиом Колмогорова. Имеет смысл говорить об относительной убедительности аргументации по отношению к отдельным аксиомам. Адекватными являются аксиома о неотрицательности субъективных вероятностей и аксиома о том, что сумма вероятностей противоположных событий равна единице. Ситуация с аксиомой аддитивности суммы вероятностей для конечного числа событий не является однозначной. Все аргументы в пользу этой аксиомы получены при условии справедливости суждений, обоснованность которых, в свою очередь, окончательно не установлена. В первом подходе субъективные вероятности описываются с помощью коэффициентов ставок. Доказательство конечной аддитивности коэффициентов ставок предполагает конечную аддитивность суммарной ставки. В то же время, как показано Шиком, аддитивность для суммарной ставки не всегда имеет место. Во втором подходе субъективные вероятности измеряются с помощью понятия ожидаемой полезности. Корректное применение ожидаемой полезности обнаруживает методологические трудности, связанные с нетранзитивностью предпочтений. Положительные аргументы в пользу конечной аддитивности представляются более убедительными, так как с помощью этой аксиомы доказана теорема о голландских условиях пари. Все три рассмотренные аксиомы принимаются большинством исследователей. Наименьшее согласие имеется по аксиоме о счетной аддитивности. Обобщенно аргументы против аксиомы сводятся к следующим возражениям. Невозможно конструктивное описание предпочтений, если оно и возможно, то приводит к парадоксам. Описание предпочтений с помощью нестандартного анализа не имеет прагматической значимости. Аргументы за эту аксиому опираются на теорему о голландских условиях пари. По нашему мнению, осталась незамеченной тенденция к сближению позиций. Она связана, с одной стороны, с успешными попытками применения нестандартного анализа для решения проблем относящихся ко многим разделам математики, с другой стороны, с успешным решением некоторых парадоксов, к которым приводит использование принципа индифферентности.

Отсутствие веских доказательств правомерного использования или невозможности использования колмогоровской аксиоматики привели к попыткам формализации субъективных вероятностей на основе не колмогоровской аксиоматики. Наиболее известной является аксиоматика Демпстера–Шафера. В этой аксиоматике не имеет место аксиома о том, что сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

Согласно Демпстеру [92], количественная оценка субъективной вероятности некоторого положения дел должна определяться основаниями, в силу которых описываемое суждением положение дел имеет место. Если мы имеем небольшие основания для появления события Т, например 0.2, и еще меньшие основания для появления противоположного события ¬Т, то, например, ¬Т получает вероятность 0.1. Отсюда в подходе Шафера аксиома о том, что сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице, не имеет места.

Математический аппарат теории Демпстера–Шафера построен на основе функций веры [93]. Существует связь между функциями веры субъективной теории вероятностей и вероятностными мерами колмогоровской теории вероятностей. Кайберг показал, что любая функция веры однозначно выразима с помощью выпуклого множества вероятностных мер [94]. В то же время не любая вероятностная мера может быть определена с помощью функций веры. Несмотря на это ограничение, применение функций веры является весьма широким от практического применения в экспертных системах до использования в современных теоретических моделях субъективных концепций теории вероятностей.

Пропоненты субъективистской (байесовской) парадигмы и фишеровской концепции являются непримиримыми оппонентами. В следующем параграфе показано, что у этих концепций имеются общие позиции по стратегическим вопросам.

§ 4. К сопоставительному анализу байесовской и фишеровской концепций

В методологической литературе байесовская концепция и концепция Неймана–Пирсона считаются непримиримыми оппонентами в целях, задачах и методах решения статистических проблем[42; 95–96]. В работе [97] показано что, в некоторых значимых для статистической практики отношениях, методологические принципы концепции Байеса(ВС) и Фишера(FC), идейно близкой подходу Пирсона–Неймана, обнаруживают близость позиций.

I. Аргументы против байесовской концепции:

1. Представителей байесовской концепции обвиняют в субъективизме, проявляющемся в назначении априорных вероятностей. Особой критике подвергается идея использовать равномерное распределение в случае отсутствия знания об описываемом положении дел.

2. Представители байесовской парадигмы настаивают на том, что вычисление вероятностей, основанное на теореме Байеса, является индуктивной логикой. Их оппоненты полагают, что методы индукции вместе с теоремой Байеса не составляют логики.

3. Важнейшей задачей индуктивной логики является определение степени подтверждения гипотез. Решение этой задачи оказывается чувствительным к выбору вероятностной меры. Каждая мера в определенных ситуациях приводит к парадоксальным решениям. Кроме того, часто не существует убедительных доводов в пользу одной меры для формального описания конкретной ситуации.

4. Проверка гипотез в этой парадигме не является оригинальной, так как оказывается адаптацией методологии классической статистики.

5. Понятие доверительной вероятности для оценивания параметра распределения, который является константой, не будет корректным, потому что константа попадает в интервал с единичной вероятностью или попадает в него с нулевой вероятностью. Промежуточные вероятности (между нулем и единицей), используемые в байесовской методологии, не имеют никакого смысла.

6. Критикуется неадекватность байесовской парадигмы для приложений в области науки. Ученые не являются байесовистами.

II. В свою очередь, аргументы против фишеровской концепции таковы:

1. Критике подвергнута неспособность использования априорной информации.

2. Проверка гипотез является самой важной задачей фишеровской концепции. Критике подвержена методология проверки гипотез.

3. Представители байесовской парадигмы отмечают, что в рамках фишеровской концепции не существует единственного доверительного интервала. Доверительная вероятность определяется для множества интервалов. В частности, при решении задачи оценивания параметров не известно, в какой интервал попадает искомый параметр.

4. Отрицается объективный характер вероятностей фишеровской парадигмы. В объективистских концепциях вероятности назначаются событиям, которые еще не произошли. Поэтому вероятность события зависит от времени и места, где это событие произошло.

5. Критикуется неадекватность фишеровской концепции для приложений в области науки.

III. При всем различии (BC) и (FC) они в некоторых отношениях обнаруживают методологическое единство:

1. Оба эти направления являются модельно-ориентированными. В этих подходах игнорируется проблема построения моделей, которая имеет первостепенную значимость для частных наук. Как (BC), так и (FC) исходит из того, что модель задана и необходимо уточнить неизвестные параметры модели.

К задачам такого рода, например, относится задача оценки параметров распределений. С самого начала предполагается известным в огромной степени больше информации, т. е. сама модель, по сравнению с тем, что будет дополнительно уточнен параметр модели.

В науке, как и в любой области рационального мышления, поведения и действия всегда было принято двигаться от решения простых задач к исследованию сложных проблем. Исходя из этого, представляется нерациональным для определения среднего, дисперсии и других статистических характеристик вначале строить статистическое распределение, параметрами которого являются среднее и дисперсия.

2. Базовые свойства моделей, такие как независимость, считаются известными априори или принимаются на основе интуитивных соображений в обоих направлениях. Предполагается, что если исследования проводились в контролируемых условиях и содержательно эксперименты являются независимыми, то и результаты экспериментов тоже будут независимыми.

3. Решения многих задач, таких как оценивание параметров распределений, построение регрессионных моделей, приводят к одинаковым численным или близким численным результатам. При этом естественно интерпретация решений будет различной.

4. Критерии оценивания параметров: состоятельность, несмещенность и эффективность используются в обоих подходах.

5. Используемые методы оценивания параметров не являются робастными, потому, что даже при небольшом отклонении статистических характеристик данных от модельных характеристик полученные оценки оказываются сильно смещенными.

6. Каждое из направлений критикует методологические принципы конкурирующего направления. Так, критикуется неубедительность концепции подтверждения гипотез в байесовском направлении из-за проблемы множественности мер. В то же время удовлетворительное решение этой проблемы не может быть предложено и в рамках фишеровского направления. В свою очередь, в байесовской парадигме критикуется методология проверки гипотез в фишеровском анализе, но не предлагается, как усовершенствовать проверку гипотез.

В качестве альтернативы этим направлениям, а скорее в качестве пропедевтики к применению этих концепций, в первой главе предложена метрологическая эмпирическая концепция. Обнаруженная концептуальная близость двух направлений не является неожиданной. Существует множество значимых проблем, мало связанных с особенностью применяемой вероятностной интерпретации. Анализу такого рода проблем посвящена заключительная глава.

Глава 3. АНАЛИЗ ФИЛОСОФСКИХ ПРОБЛЕМ, СЛАБОСВЯЗАННЫХ С ОСОБЕННОСТЬЮ ВЕРОЯТНОСТНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Постановки многих задач оказываются инвариантными типу вероятностной интерпретации. Важным классом задач такого плана являются задачи, мало связанные с видом вероятностной формализацией причинных зависимостей. Формализация причинных зависимостей оказывает стимулирующее влияние не только на познание содержательных аспектов причинности, но и на анализ проблем, сущностно связанных с исследованием причинных зависимостей.

В первом параграфе формулируются требования к обоснованным причинным формализациям. Дана классификация свойств причинных зависимостей по степени их универсальности. С использованием неуниверсальных свойств причинности дана схема решения проблемы логического фатализма. В этом подходе, в отличие от решения Лукасевича, не предполагается апелляция к причинным цепям бесконечной длины.

Понятие независимости является антиподом понятию причинной зависимости. Поэтому разумно, прежде чем заниматься поиском причинных зависимостей, предварительно проверить, не являются ли события независимыми. Огромную значимость для исследования независимости в теории вероятностей указывал Колмогоров. Значимость вызвана тем, что подавляющее число фундаментальных результатов предполагает наличие независимости.

Во втором параграфе последней главы дан анализ теоремы Мэйлока, в которой устанавливается связь понятий причинная связь и независимость.

В отличие от двух предыдущих задач, относящихся к проблемам теоретического философского анализа, очередная задача представляет широкий интерес как для анализа философских проблем, так и для применения статистического анализа в практике научных исследований. Эта задача относится к анализу так называемых парадоксов агрегации. В вероятностных формализациях причинных зависимостей и в практике статистического анализа часто возникают парадоксы агрегации. Они являются не логическими парадоксами, а парадоксами интуиции. Наиболее известный парадокс – парадокс Симпсона.

В третьем параграфе анализируются современные подходы к анализу этого парадокса.

§ 1. Транзитивность и причинная интерпретация логического фатализма

Значимость использования формализаций при описании и исследовании причинной зависимости связана с рядом обстоятельств. Среди них естественно выделяются универсальные аргументы и аргументы специального характера. К универсальным основаниям для использования формализации причинности относится повышение точности рассуждений с помощью формальных методов. На основании формальных методов можно проверять различные гипотезы и легко их модифицировать.

Эвристическая ценность формализации связана с тем, что:

– формулирование проблемы на новом формальном языке часто позволяет увидеть ее в новом свете;

– неудачная формализация свидетельствует о неглубоком проникновении в суть исследуемой проблемы;

– в свою очередь, удачное формальное изложение для многих философских проблем является свидетельством глубокого проникновения автора в исследуемую область;

– формальное описание дает возможность получить любые следствия из него и проверить их непротиворечивость;

– формализация позволяет выявить новые связи между причинными факторами для изучаемого следствия, а также связь между этими факторами и их следствием;

– формализация способствует обеспечению преемственности знания и тем самым снижает остроту герменевтической проблематики.

Сформулируем некоторые требования к корректным описаниям каузальных зависимостей.

I. Условия обоснованности формализаций причинных зависимостей. Мы исходим из следующих требований к формальным описаниям:

1. Формальное описание должно допускать ясную содержательную интерпретацию.

2. Свойства причинной связи должны иметь интуитивно очевидную интерпретацию.

3. Компоненты причинной связи тоже должны допускать содержательную интерпретацию.

В интуитивно-содержательном отношении главной чертой причинной зависимости является ее принципиальная несимметричность в смысле влияния причинного фактора на следствие и соответственно следствия на причину. В некоторых работах отрицается значимость принципиальной несимметричности причины и следствия. Например, в работе [98] подчеркивается, что правильнее говорить не о влиянии причины на следствие или наоборот, а говорить о взаимодействии, причем отмеченные выше влияния компонент причинной связи друг на друга являются моментами этого взаимодействия. Позиция о принципиальной временной несимметричности причинно-следственных отношений не является общепринятой. Так, классики, оказавшие наибольшее влияние на развитие каузального анализа – Аристотель и Юм, полагали, что причина происходит ранее следствия, скорее в силу традиции. Аргумент в пользу более раннего появления причинного фактора по сравнению со следствием, на том основании, что в случае одновременного появления причины и следствия происходит слипание времени, Аристотель не считал убедительным.

Развитие психологии, физики элементарных частиц привело к идее ретроспективной причинности. В современной философии тоже существуют разнообразные позиции по отношению к проблеме времени, даже в рамках философии науки. Например, Суппес полагает, что причина непременно происходит ранее следствия [21; 22]. В свою очередь, Картрайт не считает значимой временную несимметричность [25; 99–100]. Эльс и Собер тоже не используют идею временой несимметричности [101].

Мы полагаем, что значимыми чертами причинности являются активный характер причинного фактора по отношению к следствию и имеет место принципиальная несимметричность причины и следствия, в том числе и временная.

Отметим, что корректные формализации каузальных связей обеспечивают представление основных содержательных свойств и отношений этих связей. Кроме того, некоторые свойства обоснованных формализаций должны быть универсальными.

Универсальность некоторого свойства в детерминистском плане по отношению к причинности означает, что это свойство присуще любой причинной зависимости. В вероятностном смысле это означает, что это свойство имеет место очень часто.

Включение универсальности в число значимых свойств определяется рядом обстоятельств. Во-первых, универсальность имеет большое значение не только для причинного анализа но и для философии в целом, например, философские дискуссии будут более плодотворными, когда оппоненты стремятся к истинности обобщенных решений, а не ограничиваются правильностью частных решений. Во-вторых, правильный учет универсальности или ее отсутствия позволяет избежать ошибок присоединения, о которых говорил еще Аристотель.

Для определения степени универсальности некоторого свойства необходимо ввести оценку универсальности Оценка универсальности свойства вводится как инвариантность свойства по отношению к различным формальным моделям причинного анализа. Качественно все свойства каузальных связей можно разделить на следующие группы:

а) универсально присущие причинным зависимостям;

б) неуниверсальные, но часто являющиеся характерными атрибутами причинных зависимостей;

в) нехарактерные свойства причинности;

г) непричинные свойства.

Анализ различных формализаций показывает, что универсальным свойством причинных зависимостей является активность причинного фактора, проявляющегося в изменении следствия, при условии, что причинный фактор единственный. К универсальным свойствам относится несимметричность, независимость следствий при наличии общей причины. К нехарактерным относится рефлексивность.

Наибольший интерес представляют свойства, которые являются характерными атрибутами причинности, но в то же время не являющиеся универсальными. К ним относятся транзитивность, монотонность и др.

II. Транзитивность. Как известно, транзитивность означает, что если имеют место свойства Ф(А, В) и Ф(В, С), то также имеет место свойство Ф(А, С). Дадим анализ условий появления свойства транзитивности в детерминистских и в вероятностных моделях. Как отмечал Суппес [22], полный анализ условий появления транзитивности в вероятностных моделях является перспективным логико-философским направлением. Для того чтобы свойство Ф было транзитивным, оно должно быть определено для любых трех пар объектов. Для того чтобы система обладала свойством транзитивности, она должна обладать свойством кратковременной памяти, т. е. система должна обладать свойством забывания предшествующих элементов. Действительно, получается, что свойство Ф присуще не паре А, С а триаде А, В, С, причем Ф (А, В, С) = Ф(А, С). Примером систем с забыванием в математике являются марковские процессы. Это процессы, не зависящие от предыстории; текущее состояние определяет вероятность последующего состояния независимо от того, каким образом рассматриваемая система попала в текущее состояние. Марковские процессы характеризуются следующими условиями:

$$P(C / AB) = P(C / \neg AB),$$

здесь Р — символ вероятности.

Не все сложные свойства являются транзитивными. Например, если Ф означает «быть сильнее при игре в теннис», то из того, что А сильнее В, а В сильнее С, не следует что А сильнее С. Приведем пример, опровергающий транзитивность в общем случае. Нам достаточно рассмотреть три события – А, В, С, такие, что А**В, В**С, но неверно, что А**С, где символ ** означает наличие причинной связи. Мы полагаем, что событие А наступает ранее события В, а последнее раньше события С. Приведем матрицу переходных вероятностей, связывающих события А, В, С [22].

	C	¬C
AB	0	1
A¬B	0	1
¬AB	2/3	1/3
¬A¬B	1/3	2/3

Данная модель, с одной стороны, является наиболее простой нетранзитивной моделью. С другой стороны, она представляет собой композицию двух элементарных подмоделей, одна из которых будет детерминистской – содержащей события, происходящие с вероятностью либо 0, либо 1, а вторая – обычной вероятностной моделью.

Теперь рассмотрим подробно приведенную нами модель. Пусть $P(A) = 1/4$, $P(B / A) = 2/3$, $P(B / A) = 1/3$. Используя формулу полной вероятности, имеем

$P(B) = P(B / A)*P(A) + P(B / \neg A)*P(\neg A) = 1/6 + 1/4 = 5/12$,

$P(C) = P(C / AB)*P(AB) + P(C / A\neg B)*P(A\neg B) + P(C / \neg AB)*$,

$P(\neg AB) + P(C / \neg A\neg B)*P(\neg A\neg B) = 1/3$,

$P(C / B) = P(C / AB)*P(A / B) + P(C / \neg AB)*P(\neg A/B) = 2/5$,

$P(C / A) = P(C / AB)*P(B / A) + P(C / \neg BA)*P(\neg B / A) = 0$.

Итак, A**B, ибо $P(B / A) > P(B)$, B**C, потому что $P(C / B) > P(C)$, в то же время $P(C / A) < P(A)$, отсюда неверно, что A**C.

Особенностью данного примера является отсутствие свойства марковости:

$$P(C / AB) \neq P(C / \neg AB);\ P(C / A\neg B) \neq P(C / \neg A\neg B).$$

Дадим несколько определений.

Событие Bt' является prima facie причиной события At, если и только если

$P(At / Bt') > P(At)$, при этом:

1) $t' < t$;

2) $P(Bt') > 0$.

Теперь сформулируем определение достаточности.

Определение. Событие Bt' является достаточной причиной события At, если и только если Bt' есть prima facie события At и $P(At / Bt') = 1$.

Теперь сформулируем пример цепи, обладающей транзитивностью. Пусть $P(B / A) = 1$, $P(C / B) = 1$, тогда и $P(C / A) = 1$, что и требуется для доказательства транзитивности цепи.

Отметим, что марковость в совокупности с отсутствием взаимодействия является достаточными условиями транзитивности, но не являются необходимыми. Наиболее общий результат о транзитивности получен Эльсом и Собером [101]. Дадим формулировку условия транзитивности для n промежуточных факторов.

Пусть C – первая причина в рассматриваемой причинной цепи, E – изучаемое следствие, $F_1, \ldots, F_n$ – промежуточные переменные.

Теорема. Для любого n и любых факторов C, E, $F_1, \ldots, F_n$ и любой функции распределения Pr, если имеют место следующие четыре условия:

а) $Pr(F_j / C) > Pr(F_j / \neg C)$, $j = 1, \ldots, n$.

Это условие означает, что событие C prima facie причина всех промежуточных переменных;

б) $Pr(E / K_{ji} \& F_j) > Pr(E / K_{ji} \& \neg F_j)$, где K_{ji} – конъюнкция описаний состояний над $F_1, \ldots, F_{j-1}, F_{j+1}, \ldots, F_n$ для всех $j = 1, \ldots, n$ и для всех $i = 1, \ldots, 2^{n-1}$.

Это свойство означает, что произвольные конъюнкции K_{ji} над промежуточными переменными F_j являются prima facie причинами события E;

в) $Pr(E / K_i \& C) = Pr(E / K_i \& \neg C)$ для произвольных K_i, $i = 1, \ldots, 2^n$ от $F_1, \ldots, F_n$.

Это условие выражает марковское свойство — фактор C является причинным по отношению к любому причинному фактору и не является причинным по отношению к изучаемому следствию E, на фоне любого промежуточного фактора из K_i;

г) $Pr(F_j / \pm C, F_i / \pm C, F_k / \pm C) = Pr(F_j / \pm C)*Pr(F_i / \pm C)*$,

$Pr(F_k / \pm C)$.

Это свойство выражает множественную вероятностную независимость промежуточных переменных при условии как фактора C, так и $\neg$C.

Тогда

$$P(E / C) > P(E / \neg C).$$

Дадим доказательство утверждения для двух промежуточных факторов. Входом цепи является событие S, выходом — событие A, промежуточными переменными — события H и I. Будем полагать, что S**H, S**I, H**A, I**A.

Промежуточные переменные H и I при фиксированных событиях S или $\neg$S являются независимыми. Интересующий нас вопрос сводится к следующему: имеет ли место выполнимость неравенства $P(A / S) > P(A / \neg S)$?

В развернутом виде члены этого неравенства для случая двух промежуточных переменных H и I имеют следующий вид:

$P(A / S) = P(A / HIS)*P(HI / S) + P(A / H\neg IS)*P(H\neg I / S) +$

$+ P(A / \neg HIS)*P(\neg HI / S) + P(A / \neg H\neg IS)*(P(\neg H\neg I / S)$,

$P(A / \neg S) = P(A / HI\neg S)*P(HI / \neg S) +$

$+ P(A / H\neg I\neg S)*P(H\neg I / \neg S) +$

$+ P(A / \neg HI\neg S)*P(\neg HI / \neg S) + P(A / \neg H\neg I\neg S)*P(\neg H\neg I / \neg S)$.

Введем ряд упрощающих обозначений:

$P(A / HIS) = s$;

$P(A\neg / HIS) = t$;

$P(A / H\neg IS) = u$;

$P(A / \neg H\neg IS) = v$;

$P(H / S) = a$;

$P(H / \neg S) = b$;

$P(I / S) = c$;

$P(I / \neg S) = d$.

С учетом введенных обозначений получим

$$P(A / S) = acs + (1 - a)ct + a(1 - c)u + (1 - a)(1 - c)v.$$

После упрощений имеем

$$P(A / S) = ac(s - t - u + v) + a(u - v) + c(t - v) + v. \qquad (1)$$

Аналогично

$$P(A / \neg S) = bd(s - t - u + v) + b(u - v) + d(t - v) + v. \qquad (2)$$

Транзитивность имеет место, если выражение (1) больше выражения (2), т. е. наличие транзитивности обеспечивается выполнением следующего неравенства:

$$ac(s - t - u + v) + a(u - v) + c(t - v) + v > bd(s - t - u + v) + b(u - v) + d(t - v) + v. \qquad (3)$$

Последнее выражение представим в следующем, более удобном для анализа виде

$$(a - b)(u - v) + (c - d)(t - v) > (ca - bd)(t + u - s - v). \qquad (4)$$

Докажем последнее неравенство.

Так как $a > b$ и $c > d$, то отсюда верно: $1 - b > 1 - a$ и $1 - d > 1 - c$, так что $(1 - b)(1 - d) > (1 - a)(1 - c)$, что эквивалентно $(a - b) + (c - d) > (ac - bd)$. Отсюда следует истинность неравенства (4), ибо каждый из правых сомножителей левой части неравенства (4) больше правого сомножителя из правой части этого неравенства. Действительно, $u - v > u - v + t - s$, так как $t - s < 0$ ввиду того, что H**A. Аналогично $t - v > t - v + u - s$, так как $u - s < 0$, потому что I**A. Откуда истинность неравенства (4) является доказанной.

Мы полагали, что все события из рассматриваемой причинной цепи являются положительными причинами prima facie, т. е. что S**H, S**I, H**A, I**A. Эту ситуацию, означающую, что причинные факторы ведут себя по отношению к следствиям одинаковым образом, Дюпре [102; 103] назвал единообразием причинных факторов. Для случая двух промежуточных факторов единообразие причинных факторов не является необходимым условием транзитивности цепи. В работе Эльса и Собера приведен пример, опровергающий необходимость единообразия факторов.

Пример: $u = 0.9$, $s = 0.8$, $v = 0.2$, $t = 0.1$, $a = 0.9$, $b = 0.1$, $c = 0.2$, $d = 0.1$.

Вследствие условий задачи имеем $a > b$, $c > d$, т. е. S**H, S**I, $u > v$, откуда H**A, в то же время $t < v$, откуда неверно, что I**A.

Как мы уже выяснили, транзитивность возникает вследствие справедливости неравенства (4). Проверим, имеет ли место справедливость этого неравенства в данном случае.

Имеем

$$(a - b)(u - v) + (c - d)(t - v) = 0{,}55,$$
$$(ac - bd)(t + u - s - v) = 0,$$

и таким образом, транзитивность имеет место.

Теперь мы убедились, что требование позитивного единообразия причинных факторов не является необходимым для того, чтобы цепь была транзитивной. Результаты исследования свойства транзитивности были использованы нами при анализе подхода Лукасевича к проблеме логического фатализма.

III. Причинность и логический фатализм. Прежде чем исследовать подход Лукасевича к проблеме логического фатализма кратко напомним аристотелевскую интерпретацию этой проблемы.

Как известно, в девятой главе работы «Об истолковании» Аристотель дал логический анализ некоторых утверждений по поводу будущих случайных событий. Анализ возможных исходов будущих событий непосредственно связан с вопросами свободы воли, фатализма, и поэтому работа Аристотеля начиная с античности вызывает оживленные философские дискуссии. Аристотель показал, что использование закона бивалентности приводит к фаталистическому исходу будущих событий. Как отмечено в работе Карпенко, «под фатализмом, если следовать античным авторам, понимается тезис, что одних законов логики вполне достаточно для доказательства, что ни один человек не имеет свободы воли и все в мире происходит по необходимости. Такое понимание фатализма получило название логического фатализма» [104, с. 53]. В настоящее время существуют две принципиально различные реконструкции фаталистических содержательных рассуждений Аристотеля. Дадим краткое содержательное и формальное изложение этих интерпретаций.

Аристотель приводит два рассуждения, приводящих к фатализму. Первая интерпретация такова. Пусть является истинным, что завтра будет морское сражение. Тогда не может быть, чтобы завтра не было морского сражения, иначе не было бы истинным, что завтра будет морское сражение. Следовательно, завтрашнее сражение является необходимым. Такую трактовку Аристотелем понятия необходимости Лукасевич назвал принципом необходимости.

Дадим логическое изложение первого фаталистического аргумента. Пусть P — высказывание о будущем случайном событии; N(P) означает, что необходимо, что P, далее T(P) и F(P) означают соответственно истинно, что P и ложно P. Тогда имеем:

1) $T(P) \to N(P)$;

2) $F(P) \equiv N(\neg P)$;

3) $T(P) \vee F(P)$ — принцип двузначности;

4) $N(P) \vee N(\neg P)$. Последнее утверждение имеет место, так как из $A \to C$, $B \to D$ и из $A \vee B$ следует $C \vee D$.

Посылка 1 большинством исследователей признается неверной. Суть ошибки в смешении необходимости следования: $N(P \to q)$ с необходимостью заключения: $P \to N(P)$.

Рассмотрим содержательную реконструкцию второго аргумента Аристотеля. Пусть произошло некоторое событие, тогда в любой момент времени, предшествующий ему, было правильным утверждать, что это событие произойдет. Основываясь на этом, Аристотель полагает: в любой предшествующий момент времени являлось истинным утверждение о выполнимости данного события. Но если всегда было истинным утверждение о том, что событие произойдет, то оно не может не произойти, ибо в противном случае истина, лежащая в прошлом, могла бы перестать быть истиной, а такое утверждение означает изменяемость прошлого. В отличие от первого аргумента Аристотеля, сводящегося к тому, что от истинности некоторого утверждения осуществляется переход к необходимости этого утверждения, второй аргумент сводится к невозможности изменения прошлого. Второй аргумент считается самым сильным в защиту фатализма. Несколько замечаний по поводу этой интерпретации:

1. Неверно, что в любой момент, предшествующий произвольному событию, было верным утверждать, что оно произойдет, например, это неверно для случайных событий.

2. Изменяемо не прошлое, а лишь прошлые утверждения о будущих событиях.

Рассмотрим формализацию Лукасевича второй интерпретации. Подход Лукасевича представляет интерес как в логическом, так и в философском плане [105].

Исходными в концепции Лукасевича являются следующие предложения:

а) $(T(P))_t \vee (T(\neg P))_t$;

b) Если $(T(\neg P))t \to \neg P$.

Пусть для конкретности P означает: Ян будет завтра в полдень дома.

Базовые предложения имеют следующее обоснование. Посылка *а* верна в силу закона исключенного третьего. Посылка *б* моделирует, по сути, мысль Аристотеля о том, что если некоторое утверждение, относящееся к высказыванию о будущих событиях, истинно, то событие осуществится, ибо в противном случае истинное высказывание не может быть верным. По мнению Лукасевича, посылка *б* естественна для следующего положения дел. Пусть в данный момент истинно, что Яна не будет завтра дома и, кроме того, известно, что Ян выехал недавно далеко и надолго. Тогда нет смысла заходить к нему завтра домой.

Предложения *c* и *d* получаются из базовых с помощью правил вывода, принятых в классической логике. Пользуясь законом контрапозиции применительно к посылке *б* получаем:

c) $P \to \neg(T(\neg P))_t$.

Используя зависимость логических операций: $\to$, $\vee$, а именно $a \to b = \neg a \vee b$ применительно к посылке а получаем

d) $\neg(T(\neg P))_t \to (T(P))_t$.

Теперь, используя свойство транзитивности условного силлогизма: если a, то b, если b, то g, откуда если a, то g, из посылок *c* и *d* получаем

e) $P \to (T(P))_t$.

Таким образом, если некоторое состояние дел имеет место, то предложение, высказывающееся об этом состоянии дел в произвольный момент времени истинно, что и является сутью логического фатализма.

Для анализа причинных связей необходимо использовать адекватную причинную логику, например [106; 107]. Свойства причинных связей в этой логике являются универсальными, по отношению к нашим требованиям на универсальность, а именно в логике Шохама причина наступает ранее следствия, причинные связи несимметричны, и особенно важно, что причинные связи немонотонны. Вследствие этого они не являются транзитивными. Закон контрапозиции не имеет места в этой логике из-за временной несимметричности причины и следствия.

Таким образом, в логике Шохама переход от посылки *b* к посылке *c* невозможен, так как при этом переходе Лукасевич использовал закон контрапозиции. Таким образом, в рамках каузальных логик формула логического фатализма не имеет места. В известной монографии Карпенко, содержащей многочисленные литературные ссылки, показано, что аргументация как Стагирита, так и его многочисленных комментаторов, имеет исключительно логический характер. При этом отмечается, что фаталистические аргументы не предполагают принципа причинности [104, с. 8, 58, 66]. Мы полагаем вполне естественным использовать идею каузальности для анализа фатализма. Формальное описание каузальных связей выполнено Лукасевичем не вполне корректно. Дадим анализ каузальности в подходе Я. Лукасевича. Его допущения таковы:

1) первопричина для рассматриваемого события удалена бесконечно далеко по времени;

2) рассматриваются причинные цепи счетной мощности;

3) все события, возникающие после того, как произошло причинное событие, и до того момента, как произошло следствие, являются дополнительными причинами для этого следствия;

4) причинные цепи являются транзитивными.

Рассмотрим причинную интерпретацию Лукасевича. Имеется временной интервал (0, 1). Настоящему моменту времени отвечает точка (0). Будущее событие происходит в момент времени, соответствующий единичной координате. Причины этого события происходят в моменты времени, помеченные числами, большими, чем 1/2. Тогда причин имеется бесконечное множество и первопричина произойдет через бесконечное время. Отметим, что посылки Лукасевича оказываются несовместимыми. Он требует точного построения наименьшего числа, большего, чем 1/2. При этом он апеллирует к понятию бесконечности. Теперь покажем, что апелляция к бесконечности не является необходимой, а важнее факт наличия или отсутствия свойства транзитивности [108; 109]. Вначале мы рассмотрим причинные цепи бесконечной длины, обладающие свойством транзитивности. Во-первых, принимая транзитивность, мы абстрагируемся от того, что все причинные факторы по-разному влияют на следствие в силу различной удаленности от него как во времени, так и в пространстве. Во-вторых, на фоне одних факторов другие могут стать нейтральными по отношению к следствию. Итак, мы полагаем, что все причинные факторы одинаковы. Заменим первую посылку Лукасевича на посылку 1': Первое событие причинной цепи уже произошло. Далее, пусть уже произошло m событий. Для того чтобы произошло (m + 2)-е событие, необходимо появление только одного события, здесь $m \geq 1$. Так как все факторы одинаковы, то относительный вес недостающего события равен $1 / (m + 2)$ и эта величина при достаточно больших значениях m стремится к нулю. В некотором смысле происходит ускорение времени, и мы двигаемся по цепи с «бесконечной» скоростью. Тем самым апелляция Лукасевича к бесконечности не снимает трудностей с решением проблемы фатализма.

Теперь рассмотрим более реалистичный вариант. Наши посылки являются отрицанием следующих посылок Лукасевича:

1) первое событие причинной цепи уже произошло;

2) рассматриваются цепи конечной длины;

3) не все события, возникающие после того, как произошло причинное событие, и до того момента, как произошло следствие, являются дополнительными причинами для этого следствия;

4) свойство транзитивности не имеет места.

В силу этого, фатализм не является неизбежным уже для конечных цепей.

В заключение отметим, что для строгого анализа проблемы логического фатализма нужны многозначные логики, или нестандартные семантики булевой алгебры, не использующие истинностной интерпретации по Тарскому [116; 117].

От анализа свойства транзитивности, которое не является универсальным для причинных зависимостей, перейдем к анализу свойства независимости. Независимость является антиподом причинности. Прежде чем исследовать наличие причинной связи для двух и более событий, имеет смысл проверить, не являются ли эти события независимыми.

§ 2. К анализу понятия независимости в теории вероятностей и вероятностном причинном анализе

Понятие независимости относится к так называемым базовым свойствам математических дисциплин. Свойство называется базовым, если:

1) наличие свойства логически не выводимо из наличия других свойств;

2) это свойство используется при доказательстве фундаментальных теорем по крайней меры одной математической дисциплины. Свойство независимости является базовым для колмогоровской теории вероятностей, частотной концепции Мизеса, субъективистских вариантов теории вероятностей.

Свойство независимости является базовым для классической концепции теории вероятностей и колмогоровской аксиоматической теорий, потому что на их основе доказаны так называемые фундаментальные теоремы закона больших чисел и центральная предельная теорема. В математической статистике базовым свойством является свойство однородности.

В частотной теории Мизеса свойство невозможности системы игры соответствует свойству независимости. В субъективистских теориях вероятностей свойству независимости соответствует свойство обмениваемости.

1. Особую значимость исследованиям понятия независимости придавал основатель современной аксиоматической теории вероятностей А. Н. Колмогоров: «Исторически независимость испытаний и случайных величин явилась тем математическим понятием, которое придало теории вероятностей своеобразный отпечаток. Классические работы Лапласа, Пуассона, Чебышева, Маркова, Ляпунова, Мизеса и Бернштейна действительно посвящены изучению рядов независимых случайных величин. Если в новейших исследованиях (Марков, Бернштейн и др.) часто отказываются от предположения о полной независимости, то оказываются принужденными для получения достаточно содержательных результатов ввести аналогичные ослабленные предположения о цепях Маркова. Мы приходим, следовательно, к тому, чтобы в понятии независимости видеть зародыш своеобразной тематики теории вероятностей » [19, с. 18]. И далее: «Соответственно одной из важнейших задач философии естественных наук, после разъяснения пресловутого вопроса о сущности понятия вероятности, являются выяснение и уточнение тех предпосылок, при которых можно какие-либо данные рассматривать как независимые» [Там же, с. 19].

В работах некоторых современных авторов, в том числе в работах известного шведского математика Крамера, переоценивается значимость результатов, полученных без применения свойства независимости. В широко известной работе, посвященной основаниям математической статистики, Крамер писал: «Центральная предельная теорема может быть распространена на различные случаи, когда случайные величины не являются независимыми» [110, с. 244]. Сам Крамер не доказывает предельные теоремы в предположении, что независимости нет. Он ссылается на работы других авторов, в том числе на работы С. Н. Бернштейна. Анализ работы Бернштейна показывает, что его доказательство использует понятие слабой независимости [111]. Слабая независимость в пределе эквивалентна обычной независимости. Очевидно, что Крамер переоценил значимость результатов, полученных на основе понятия «слабая независимость».

Дадим основные определения независимости.

Два события A и B называются независимыми, если

$$P(A \wedge B) = P(A)*P(B). \qquad (1)$$

Это определение адекватно для любых событий, в том числе равных нулю. Пусть $P(A) = 0$. В силу того, что $A \wedge B \subseteq A$, получаем $P(A \wedge B) = 0$, откуда следует выполнимость равенства (1).

Обобщением независимости для двух событий является независимость n событий. События $A_1, A_2, \ldots, An$ называются независимыми в совокупности, если для любых $1 \le i_1 < i_2, < \ldots < i_m \le n$ выполняются равенства

$$P(Ai1, Ai2, \ldots, Aim) = P(Ai1)*P(Ai2)*\ldots*P(Aim). \qquad (2)$$

Колмогоров предлагает определение независимости событий посредством независимости испытаний. Испытанием называется разложение пространства элементарных событий в сумму непересекающихся событий.

События A1, A2, …, An называются независимыми, если испытания $\Omega = A_k + \neg A_k$, $k = 1, \ldots, n$ являются независимыми.

В теории вероятностей часто приходится рассматривать не только независимость событий, но и систем событий [112, с. 39].

Две алгебры $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$ называются независимыми, если независимы любые два множества A1 и A2, входящие в $\mathbf{A_1}$ и $\mathbf{A_2}$.

Для определения независимости для случайных величин и функций распределения дадим необходимые определения.

Определение 1. Однозначную действительную функцию $\xi = \xi(\omega)$, определенную на основном множестве Ω, называют случайной величиной, если множество всех ω, для которых справедливо неравенство $\{\omega: \xi(\omega) < x\}$, принадлежат пространству событий F.

Определение 2. Функция $F_\xi(x) = P(\xi(\omega) < x)$ называется функцией распределения случайной величины ξ.

Перейдем к определению независимых случайных величин и функций распределения.

Определение 3. Случайные дискретные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ называются независимыми, если для любых чисел $x_1, x_2, \ldots x_n$ имеет место равенство:

$$P(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots, \xi_n = x_n) = P(\xi_1 = x_1)*P(\xi_2 = x_2)*\ldots*P(\xi_n = x_n). \quad (3)$$

Определение 4. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ называются независимыми, если для любых чисел $x_1, x_2, \ldots x_n$ совместная функция распределения случайных величин $F_{\xi 1, \xi 2, \ldots \xi n}$ может быть представлена с помощью функций распределения $F_{\xi 1}, F_{\xi 2}, \ldots, F_{\xi n}$ следующим образом:

$$F_{\xi 1, \xi 2, \ldots \xi n}(x_1, x_2, \ldots x_n) = F_{\xi 1}(x_1)* F_{\xi 2}(x_2)*\ldots* F_{\xi n}(x_n). \quad (4)$$

Каким образом обычно приходят к модели независимых испытаний?

Формальная проверка условий (2–4) для большого числа событий, случайных величин или функций распределения является весьма трудоемкой задачей. Поэтому ею часто пренебрегают. К модели независимых испытаний приходят на основании следующих доводов:

1) отсутствия знаний, о какой либо связи об изучаемых явлениях;

2) контроля экспериментальных условий в сочетании с интуитивными соображениями о независимости результатов экспериментов используют формальную модель независимых экспериментов. Критика подобного рода оснований дана в работах Алимова [6; 64].

Приведенные соображения не могут заменить формальную проверку независимости. Во-первых, за пределами физики технически сложно осуществить полный контроль условий проведения экспериментов. Во-вторых, даже в физике не всегда возможно учесть влияние фоновых условий. Известный пример такого рода связан с открытием в лаборатории Резерфорда радона и был описан нами в параграфе, посвященном метрологической концепции.

Реалистичная методология принятия модели независимых событий даны в работах Алимова и некоторых других исследователей. Эта методология основана на установлении устойчивости частот и многократной проверке выполнимости условия (1).

Даже выполнение равенства (1) с заданной точностью не гарантирует корректное установление независимости.

Пример, иллюстрирующий непростую связь формальной независимости и реальной связи, был рассмотрен Колмогоровым [50]. Пусть η есть равномерно распределенная на [0,1] случайная величина. Тогда в разложении η в двоичную дробь

$$\eta = \xi_1 / 2 + \xi_2/4 + \xi_3 / 8 + \ldots \quad (5)$$

случайные величины ξ_1 будут независимы, хотя согласно выражению (5) эти величины имеют общее происхождение.

Боровков полагает, «что формальное определение независимости гораздо шире понятия реальной независимости в смысле принадлежности к причинно не связанным явлениям» [113, с. 55]. Далее он продолжает: «Понятно, что это обстоятельства лишь расширяет сферу применимости всех утверждений, которые получены нами при выполнении формального условия независимости» [Там же].

Действительно, пример (5) убедительно демонстрирует, что формальное определение независимости шире понятия реальной независимости. Близкие соображения о связи формальной и реальной независимости даны Алимовым. По Алимову, интуиция в сочетании с контролем над условиями проведения эксперимента не дают оснований для перехода к формальной модели независимых испытаний. Верным является обратное осторожное высказывание. Формальная независимость дает некоторые основания для осторожного предположения о реальной независимости.

Убедительные основания, для того чтобы считать события A и B независимыми, имеют место при выполнимости следующего невероятностного соотношения:

$$A \cap B = \varnothing,$$

при условии, что $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$.

Если не существует никакой информации об исследуемых случайных величинах или функциях распределения, то необходимо проверять наличие условий (1–4). Кроме того, можно использовать условия, которые имеют место только при наличии независимости. Например:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{6}$$

Если известно, что исследуемые величины связаны линейной зависимостью и, кроме того, они – нормальное распределение, то факт наличия независимости можно проверить с помощью коэффициента корреляции. Равенство нулю коэффициента корреляции свидетельствует об отсутствии линейной связи. В то же время отметим, что равенство нулю коэффициента корреляции не обязательно свидетельствует об отсутствии статистической связи. Верным является обратное утверждение, а именно коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю.

В чем заключается привлекательность свойства независимости?

Во-первых, наличие независимости существенно упрощает вычисление ряда статистических характеристик. Например, дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин. Функция распределения независимых случайных величин равна произведению функций распределения этих величин.

Во-вторых, именно для независимых случайных величин получены многие серьезные результаты, например теорема, выражающая так называемый закон больших чисел. Раньше эту теорему оценивали как эпистемологически значимую [18].

В-третьих, независимые свидетельства являются убедительным подтверждением гипотезы при недостоверных источниках информации.

В-четвертых, на использовании понятия независимости построена методология подсчета вероятностей в байесовских сетях.

Дадим определение понятию независимости для событий с помощью использования понятия условной вероятности.

События А и В являются независимыми, если имеет место, следующее равенство:

$$P(A / B) = P(A). \tag{7}$$

Покажем, что понятие статистической независимости, имеет ограниченное значение для конструктивного применения в практике следующих научных исследований:

1) статистическая независимость не может быть получена логически из других определений. Она определяется через нелогическое равенство условной и безусловной вероятностей;

2) статистическая независимость допускает только частичную экспликацию посредством коэффициента корреляции. Связь понятий независимости и коэффициента корреляции такова: если случайные величины независимы, то коэффициент корреляции равен нулю. В то же время равенство нулю коэффициента корреляции не обязательно влечет статистическую независимость. Пример такого плана смотрите, например, в работе [18, с. 180]. Отметим, что в частном случае, если случайные величины имеют нормальное распределение, то равенство нулю коэффициента корреляции этих случайных величин влечет их независимость;

3) понятие статистической независимости имеет исключительно тривиальную теоретико-множественную интерпретацию: статистически независимые события с положительными вероятностями имеют непустое пересечение;

4) понятие статистической независимости является симметричным, поэтому оно неадекватно для описания независимости причинной переменной от переменной следствия.

Причинная и статистическая независимости являются противоположными полюсами. Прежде чем искать причинную зависимость, имеет смысл определить, не являются ли исследуемые феномены независимыми? В теореме Мэйлока установлена связь понятий «причинная вероятностная зависимость» и «вероятностная независимость». Компонентами причинной связи в формализации Мьюйлока являются случайные переменные.

Определение. Случайная величина X, описывающая некоторые свойства природы (положения дел), является prima facie причиной другой случайной величины Y, если для заданного совместного распределения X и Y и при фиксации фоновых условий, удовлетворяющих сформулированным требованиям [24], имеет место такая функциональная связь P между X и P(Y):

$$P : X \to P(Y),$$

при этом каждому $x \in X$ соответствует единственная функция распределения P(x) во множестве P(Y) всех возможных функций распределения для значения переменной Y. Кроме того, верны следующие условия:

а) мощность множества X не меньше, чем два; и по крайней мере, для двух значений x_1 и $x_2 \in X$ соответствующие отображения $P : x_i \to P(Y)$, где $i = 1,2$, различны;

б) положение дел, описываемое переменной X, относится к более раннему моменту времени, чем положения дел, описываемые переменной Y. В рамках мьюйлоковской формализации обнаружена связь между причинностью и статистической независимостью.

Теорема об условной независимости. Пусть X и Y – случайные величины, описывающие некоторые состояния дел, при этом X prima facie причина Y, задано совместное распределение X и Y и фоновые условия удовлетворяют выше сформулированным требованиям. Зафиксируем $x_i \in X$ и при одних и тех же фоновых условиях произведем n наблюдений над $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$. Тогда имеет место

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n / x_i) = \prod_{k=1}^{n} f(y_k / x_i),$$

где $f(y_1, y, \ldots, y_n / x_i)$ – совместная функция распределения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ при одном и том же x_i, $f(y_k / x_i)$ – функция распределения y_k при фиксированном значении x_i.

От анализа связи причинности и независимости перейдем анализу парадоксов агрегации, часто возникающих при использовании причинных вероятностных формализаций, как при анализе теоретических проблем, так и при практическом использовании причинных формализаций.

§ 3. Вероятностные парадоксы агрегации

Если следовать математической литературе, то объем понятия «вероятностный парадокс» весьма широк. В известную монографию, специально посвященную вероятностным парадоксам, включены утверждения, относящиеся к различным отделам стохастической математики: элементарная теория вероятностей; математическая статистика; основания теории вероятностей и случайные процессы [114]. Небольшую часть этой книги представляют результаты, полученные с ошибками. Большинство результатов, относящихся к вероятностным парадоксам, являются безупречными с логической точки зрения. Особенностью этих нелогических парадоксов оказывается неинтуитивный, неожиданный характер. Чистые математики весьма лояльно относятся к вероятностным парадоксам. Исключением в этом смысле является парадокс Банаха–Тарского, который относится к основаниям теории вероятностей [114].

В настоящей работе рассмотрены вероятностные парадоксы агрегации в связи с анализом проблем, относящихся к области философии науки и методологии статистики. В первые парадоксы агрегации были рассмотрены Юлом в 1899 г. Далее они несколько раз переоткрывались. В 1974 г. парадокс агрегации в честь открывшего его в 1951 г. статистика Симпсона получил его имя. Для анализа философской и логико-прагматической значимости парадокса необходимо дать формулировку этого парадокса.

Наиболее простой вариант парадокса агрегации изложен в книге знаменитого популяризатора науки Гарднера [115].

Более общая формулировка парадокса Симпсона имеет следующий характер [74]:

1) $P(A / BC) \geq P(A / \neg BC)$;

2) $P(A / B\neg C) \geq P(A / \neg B\neg C)$;

3) $P(A / B) < P(A / \neg B)$.

Для того чтобы убедиться в логической корректности триады условий, выражающих парадокс, представим обе части третьего условия с помощью формулы полной вероятности:

$$P(A / B) = P(A / BC)*P(C / B) + P(A / B\neg C)*P(\neg C / B); \quad (4)$$

$$P(A / \neg B) = P(A / \neg BC)*P(C / \neg B) + P(A / \neg B\neg C)*P(\neg C / \neg B) \quad (5)$$

Анализ выражений 4 и 5 показывает, что выполнение условий 1 и 2 недостаточно для выполнимости третьего условия. Условия 1 и 2 необходимы и достаточны для выполнения условия 3, если фоновые условия C будут встречаться с одинаковыми частотами как для причинного фактора B, так и $\neg$B.

В западной литературе исследования, относящиеся к парадоксу Симпсона, представлены весьма полно. Мотивация для исследования парадокса имеет разноплановый характер. Наиболее значимыми направлениями работ, относящимися к парадоксу, по нашему мнению, являются следующие направления:

1) метафизическая проблематика, связанная с принципиальной неоднородностью реального мира;

2) теоретико-статистическая проблематика, связанная с анализом понятия однородности данных;

3) проблема принятия решений, если имеет место парадокс;

4) строгая формулировка необходимых и достаточных условий, которые обеспечивают наличие парадокса.

1. Позитивисты полагали, что теоретическое знание имеет весьма ограниченную значимость для науки. Следуя позитивистам, теоретическое знание может быть редуцировано к эмпирическому знанию. Например, понятие «закон» может быть редуцировано к понятию «эмпирическая связь» с помощью процедуры элиминации теоретических терминов, которая была предложена Рамсеем. Так называемая рамсей-элиминация обнаружила проблемы, и поэтому она не является обоснованным аппаратом для решения проблемы редукции теоретических терминов к эмпирическим терминам.

Объяснение с помощью понятия причины наряду с понятием «закон» относится к фундаментальным принципам объяснения. Парадокс Симпсона естественным образом возникает при использовании аппарата условных вероятностей для описания причинных зависимостей. Поэтому парадоксы агрегации показывают, что вероятностные причинные законы не сводимы к ассоциативным вероятностным причинным законам. Философская значимость парадокса и соответственно широкое внимание исследователей к изучению парадокса Симпсона обязаны тому обстоятельству, что парадокс показывает ограниченную значимость декартовского принципа: разделяй и властвуй. При одном разбиении целого на части и обнаружении, что определенная закономерность относится ко всем частям, дальнейший поиск может обнаружить невыполнимость закономерности по отношению к системе в целом. При другом разбиении целого на части, каждая из которых обладает определенной закономерностью, может оказаться, что закономерность не имеет место при объединении частей.

Парадокс Симпсона связан с разнообразием и неоднородностью исследуемого мира явлений. Существует неограниченное множество проявлений неоднородности. Поэтому формальная экспликация свойства неоднородности универсальным образом является трудновыполнимой задачей. Сложности возникают при попытке конструктивного описания свойства неоднородности, составляющих частей системы. Для того чтобы определить, являются ли исследуемые множества однородными, необходимо установить, что класс, содержащий эти множества, тоже обладает свойством, которое присуще всем множествам.

Формы проявления парадокса агрегации являются различными. В общем виде причинный фактор подчиняется парадоксу, если при некоторых фоновых условиях он проявляется, а при некоторых не проявляется. Можно выделить два противоположных и ярких случая проявления парадокса. В первом случае предполагаемый причинный фактор проявляется как причинный на всех выделенных частях исследуемого класса, но не проявляется как причинный для всего класса. Во втором случае предполагаемый причинный фактор проявляется как причинный по отношению ко всему классу событий, но не проявляется на всех выделенных частях исследуемого класса.

При исследовании влияния причинного фактора, входящего в причинную цепь, возникает проблема учета влияния фоновых причинных факторов. Для того чтобы правильно определить влияние причинного фактора, необходимо знать заранее другие причинные факторы. Эта ситуация напоминает проблему определения однородности, так как определение однородности частей требует исследование поведения целого. При определении однородности системы возникает логический круг. Определение однородности частей требует апелляции к целому, а определение однородности целого требует анализа частей. Описание влияния причинного фактора также предполагает логический круг. Для того чтобы определить влияние причинного фактора, необходимо знать влияние всех других факторов системы, в свою очередь, влияние системы предполагает знание всех факторов.

Подход к изучению парадокса Симпсона, известного специалиста в области философии науки Нэнси Картрайт, основан на использовании логического круга [76]. Картрайт полагает, что корректное описание влияния вероятностной причины несовместимо с парадоксом Симпсона, поэтому причинный фактор должен проявляться при любых фоновых условиях. Это требование ведет к логическому кругу. Пусть фоновые условия представлены причинными факторами

$$C1, C2, \ldots, Cn.$$

Тогда, для того чтобы фактор C1 считался причинным, он должен изменять условную вероятность следствия на фоне факторов C2, C2, .., Cn. Аналогично фактор C2 будет считаться причинным, если он изменяет условную вероятность следствия на фоне C1, C3, C4, ..., Cn. При рассмотрении двух факторов имеет место чистый логический круг C1 определяется через C2 и соответственно C2 определяется через C1.

Для упрощения анализа влияния исследуемого фактора на следствие предполагается, что фоновые факторы оказываются независимыми по отношению друг к другу. Предложенная Картрайт формализация оказывается неполной, т. е. она не представляет комплекс условий, при выполнении которого парадокс не будет иметь место.

2. С операционалистских позиций для многих западных философов парадокс означает, что условные вероятности не являются адекватным аппаратом для описания причинных зависимостей. В этом же ключе Патрик Суппес выражал сомнения в перспективности работ, посвященных исследованию парадоксам агрегации [22]. Он считает, что на практике фоновые условия обычно не известны, и, кроме того, понятие неоднородности не операционализировано каким-либо универсальным образом в методологии статистики.

С одной стороны, понятие однородности является базовым в статистике, с другой стороны, не существует унифицированного определения для однородности. Свойство называется базовым, если оно удовлетворяет двум условиям. Во-первых, оно не может быть логически выведено с помощью любой комбинации других свойств. Во-вторых, все методы статистики предполагают, что обрабатываемые данные обладают базовыми свойствами. Базовыми свойствами в статистике и теории вероятностей является свойство независимости и в статистике свойство однородности.

Однородность означает одинаковость двух и более совокупностей данных в определенном отношении. Существует несколько вариантов гипотезы об однородности данных [116]. В первом варианте предполагается, что генеральные совокупности, из которых извлечены данные, одинаковы и, значит, им соответствуют одинаковые функции распределения. В статистике принято гипотезу об однородности распределений записывать следующим образом:

$$H0: F1(x) = F2(x) = \ldots = Fn(x) = F(x). \quad (5)$$

Здесь Fi(x)-функция распределения в i-й генеральной совокупности.

Наиболее часто эта гипотеза рассматривается для случая проверки однородности двух выборок с помощью критериев Колмогорова–Смирнова и Пирсона. Предполагается, что сформулирована гипотеза о двух совокупностях данных, которые описываются одной и той же функцией распределения. На основании гипотетического распределения и исследуемых данных конструируется так называемая статистика критерия. Статистика критерия представляет собой максимальное отклонение гипотетических функций распределения. Далее вычисляется максимальное отклонение, если оно превышает некоторую контрольную величину (определяемую в зависимости от заданной допустимой ошибки), то гипотеза однородности отклоняется. В противном случае гипотеза не отклоняется. Мера отклонения в критерии Колмогорова–Смирнова имеет следующий вид:

$$\sup_x \left| F1^{n1}(x) - F2^{n2}(x) \right| .$$

В критерии Пирсона предполагается, что имеется $k \geq 2$ выборок объемом ni и данные разбиты на r групп. Количество элементов j-й выборки, попавших в i-ю группу, будем обозначать через vij. Статистикой критерия является величина

$$\chi^2 = n\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k}\frac{(\nu_{ij} - \nu_{i.}\nu_{.j})^2}{\nu_{i.}}\nu_{.j}. \qquad (6)$$

Здесь

$$\nu_{i.} = \sum_{l=1}^{k}\nu_{il}, \; \nu_{.j} = \sum_{j=1}^{r}\nu_{lj}, \; n = \sum_{i=1}^{k}n_i. \qquad (7)$$

Вторая группа гипотез об однородности предполагает, что исследуемые совокупности относятся к одному распределению, но каково это распределение неизвестно. В этом случае задается группа альтернативных гипотез, согласно которым распределения, описывающие совокупности, сдвинуты относительно друг друга. Альтернативные гипотезы обозначим следующим образом: H1i, I = 1,3.

Символически альтернативные гипотезы представлены так:

H11 = F1(x) = F2(x - μ) μ ≠ – распределения сдвинуты;

H12 = F1(x) = F2(x - μ) μ > 0 – второе распределение сдвинуто влево по отношению к первому;

H13 = F1(x) = F2(x - μ) μ < 0 – второе распределение сдвинуто вправо по отношению к первому.

Для исследования этого класса задач используются так называемые ранговые критерии.

В третьей группе гипотез предполагается, что исследуемые совокупности относятся к одному распределению, но каково это распределение – неизвестно. Исследуется гипотеза о равенстве дисперсий этих совокупностей.

Отдельно выделяется класс задач проверки однородности гипотез о равенстве средних величин для случая, если исследуемые совокупности относятся к нормальному распределению. Аналогичные задачи формулируются для проверки равенства дисперсий и коэффициентов корреляции нормально распределенных совокупностей.

Понятие однородности в статистике означает определенную близость двух совокупностей. Так как близость рассматривается по отношению к разным понятиям, таким как распределение либо моменты распределения или другие произвольные статистические характеристики (кроме того, исходная информация для проверки близости является неодинаковой), то и общих унифицированных методов для проверки однородности не существует.

Важнейшей причиной для исследования парадоксов агрегации является то, что они часто естественным образом встречаются в практике статистического анализа. Известны варианты парадокса Симпсона, которые имели место при тестировании эффективности лекарств, при анализе половозрастной структуры студентов, поступивших в университет Беркли. В последнем случае девушки более успешно сдавали экзамены, чем юноши по всем факультетам, но в целом частота поступивших юношей оказалась выше соответствующей частоты прошедших в университет девушек. Вопреки заявлению феминисток о дискриминации, оказалось, что формально описываемая ситуация связана с парадоксом. Статистический анализ показал, что девушки предпочитали наиболее престижные факультеты, где был более высокий конкурс [99].

3. В последние годы произошли изменения в характере используемых методов при исследовании парадоксов агрегации. Большинство подходов, как и прежде, носит качественный характер, тем не менее некоторые попытки анализа осуществлялись достаточно строгими средствами. Например, в работе Прасанты Бандиопадхиа осуществлена попытка формулирования необходимых и достаточных условий для описания условий возникновения парадокса [117].

Принимая во внимание, что сумма коэффициентов при условных вероятностях в выражениях 4 и 5 равна единице, перепишем эти выражения для последующего анализа в более удобном виде. Для упрощения выражений 4 и 5 введем ряд упрощающих обозначений. Для выражения 4 эти новые обозначения таковы:

$P(A / B)$ обозначается через α; $P(A / BC)$ через A1, $P(A / B\neg C)$ – через A2; $P(C / B)$ через a, тогда $P(\neg C / B)$ примет обозначение (1-a).

Для выражения 5 новые обозначения имеют следующий вид:

$P(A / \neg B)$ обозначается через β, $P(A / \neg BC)$ через B1, $P(A / \neg B\neg C)$ через B2, $P(C / \neg B)$ через b, тогда $P(\neg C / \neg B)$ примет обозначение (1-b). С учетом введенных обозначений получим:

$$\alpha = A1*a + A2*(1\text{-}a); \tag{8}$$
$$\beta = B1*b + B2*(1\text{-}b). \tag{9}$$

Для описания необходимых и достаточных условий, приводящих к парадоксу, введем символику для описания возможных соотношений между членами выражений 8 и 9.

Пусть

$$C1 \equiv \beta \geq \alpha,\ C2 \equiv A1 \geq B1,\ C3 \equiv A2 \geq B2; \tag{10}$$
$$C1' \equiv \alpha \geq \beta,\ C2' \equiv B1 \geq A1,\ C3' \equiv B2 \geq A2. \tag{11}$$

С учетом этого гипотеза о необходимых и достаточных условиях появления парадокса имеет следующий вид:

$$C = (C1 \wedge C2 \wedge C3) \vee (C1' \wedge C2' \wedge C3'). \qquad (12)$$

Если условие 12 является необходимым условием появления парадокса, то при отрицании этого условия парадокс не будет иметь место. При отрицании выражения 12 получим

$$\neg C = (\neg C1 \vee \neg C2 \vee \neg C3) \wedge (\neg C1' \vee \neg C2' \vee \neg C3'). \qquad (13)$$

Выражение 13 будет справедливо при следующих условиях:

1) $\neg C1 \wedge \neg C2'$;
2) $\neg C1 \wedge \neg C3'$;
3) $\neg C1' \wedge \neg C2$;
4) $\neg C1' \wedge \neg C3'$;
5) $\neg C2 \wedge \neg C3'$;
6) $\neg C3 \wedge \neg C2'$.

Условие один эквивалентно тому, что $\alpha > \beta$ и $A1 > B1$. При любом соотношении между A2 и B2 парадокс не имеет место. Анализ остальных пяти условий показывает, что в каждом из этих пяти случаев парадокс не возможен.

Для анализа достаточных условий ограничимся рассмотрением первого дизъюнктивного члена выражения 12. Так как второй член аналогичен первому. Выражение (12) формально справедливо в следующих случаях:

1) $\beta = \alpha$ и $A1 = B1$ и $A2 = B2$;
2) $\beta > \alpha$ и $A1 = B1$ и $A2 = B2$;
3) $\beta > \alpha$ и $A1 > B1$ и $A2 = B2$;
4) $\beta > \alpha$ и $A1 = B1$ и $A2 > B2$;
5) $\beta > \alpha$ и $A1 > B1$ и $A2 > B2$;
6) $\beta = \alpha$ и $A1 > B1$ и $A2 > B2$;
7) $\beta = \alpha$ и $A1 = B1$ и $A2 > B2$;
8) $\beta = \alpha$ и $A1 > B1$ и $A2 = B2$.

Для дальнейшего анализа полезно различать строгую и нестрогую формы парадокса.

В строгом варианте парадокс имеет вид

1) $A1 > B1$;
2) $A2 > B2$;
3) $\alpha \leq \beta$.

Нестрогие формы парадокса получаются при использовании нестрогих неравенств в одном из первых двух условий. В наиболее общем варианте нестрогая форма парадокса имеет следующий вид:

1) $A1 >(\geq) B1$;
2) $A2 \geq(>) B2$;
3) $\alpha \leq \beta$.

Если в слабом варианте во всех трех условиях имеет место знак равенства, то парадокс не имеет место. Очевидно, что в первом из восьми условий парадокс не имеет место. В остальных семи случаях парадокс имеет место. В работе [117] утверждается, что все условия появления парадокса будут перечислены, если к семи последним условиям добавить отрицание первого условия. При отрицании условия один получается следующее выражение:

$$\neg(\alpha = \beta) \vee \neg(A1 = B1) \vee \neg(A2 = B2) \tag{14}$$

Выражение 14 будет справедливо при выполнении одного из следующих условий:

1) $(\alpha > \beta)$ и $(A1 > B1)$ и $(A2 > B2)$;
2) $(\alpha > \beta)$ и $(A1 > B1)$ и $(A2 < B2)$;
3) $(\alpha > \beta)$ и $(A1 < B1)$ и $(A2 > B2)$;
4) $(\alpha > \beta)$ и $(A1 < B1)$ и $(A2 < B2)$;
5) $(\alpha < \beta)$ и $(A1 < B1)$ и $(A2 > B2)$;
6) $(\alpha < \beta)$ и $(A1 > B1)$ и $(A2 < B2)$;
7) $(\alpha < \beta)$ и $(A1 > B1)$ и $(A2 > B2)$;
8) $(\alpha < \beta)$ и $(A1 < B1)$ и $(A2 < B2)$.

В шести из восьми возможных случаев, представляющих отрицание выражения 13, парадокс не имеет место. Парадокс имеет место в четвертом и восьмом случаях.

Несмотря на технические ошибки, подход, реализованный в этой работе, является весьма элегантным, так как не предполагается никакой информации о весовых коэффициентах.

Задача точного аналитического описания условий, вызывающих парадокс, бесспорно, имеет теоретическое значение. Например, подход, развитый в работе [117], является контрпримером для парадигмы, предполагающей, что парадокс происходит в силу правила лишней посылки. Так как правило лишней посылки является обоснованным в классической логике, то на этом основании считается, что классическая логика неадекватна для описания причинных зависимостей. Согласно этой точке зрения, для описания причинных зависимостей является адекватной немонотонная логика. На самом деле, описание парадокса не использует правило лишней посылки. В изложенном выше подходе механизм порождения парадокса Симпсона дан в рамках элементарной логики. Этот подход не является единственным для описания условий, позволяющих избежать парадокса Симпсона. Так, в ряде статей Гуда и Митчелла предложены строгие условия для того, чтобы парадокс не имел место при анализе таблиц сопряженности [118].

4. Учет строгих условий, при которых парадокс не имеет место, позволяет уйти от парадокса еще на стадии планирования эксперимента. Тем не

менее попытки формулирования условий, при которых парадокс возникает, имеют скорее теоретическое значение.

Настоящая практическая проблема заключается в том, как принимать решение, если парадокс имеет место. Содержательный анализ парадокса предполагает определение причин неодинаковой встречаемости фоновых условий. Если неодинаковая встречаемость вызвана объективными причинами, то парадокс выражает принципиальную неоднородность мира исследуемых явлений. Если неодинаковая частота встречаемости фоновых условий имеет временной характер, то это означает, что парадокс также имеет временной характер. При невозможности содержательного анализа для частоты встречаемости факторов в некоторых ситуациях можно принять решение формальным путем. По формальным основаниям парадокс имеет место для неодинаковых объемам сравниваемых выборок. Для исследования влияния неоднородности объемов данных вводится понятие парадоксальной силы. Парадоксальная сила определяется следующим образом:

$$\varepsilon = |P(A / B) - P(A / \neg B)|.$$

Если парадокс вызван неоднородностью выборок, то при уменьшении неоднородности значение парадоксальной силы будет уменьшаться. Если при уменьшении неоднородности регулярно будет наблюдаться уменьшение парадоксальной силы, то парадокс вызван именно неоднородностью. Если при уменьшении неоднородности проявляемость не уменьшается, то неоднородность является не единственной причиной парадокса и для принятия решения требуются дополнительные исследования [119].

Постановки задач, приводящие к парадоксу Симпсона, не зависят от типа используемой вероятностной интерпретации, при анализе парадоксов могут быть использованы различные методы, в том числе апеллирующие к особенностям вероятностной интерпретации. Аналогичная картина имеет место для проблемы референтного класса, она возникает для различных интерпретаций, и некоторые подходы к ее решению опираются на особенности вероятностных интерпретаций. Завершает главу анализ проблемы референтного класса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко сформулируем результаты проведенного исследования.

1. Существует сильная вариабельность в оценивании значимости формализаций для использования в науке и философии. Показано, что вариабельность оценок определяется зависимостью оценки от типа применяемой формальной теории, области приложений и характера решаемых задач. Выделяется два типа приложений. В связи с этим сформулированы два различных подхода к описанию требований к обоснованным приложениям теорий.

Во-первых, применение математических конструкций дедуктивных теорий, например теории групп в теоретических науках – в теоретической физике или субъективистской концепции вероятностей. В случае использования аксиоматических формализаций в теоретических науках оказывается достаточным похожесть математического объекта на представляемый объект из формализуемой научной области, а также корректное задание исходных вероятностей, которое не приводит к парадоксам. Во-вторых, применение неаксиматических эмпирических теорий, в частности частотной статистической концепции в экспериментальных науках, где большинство законов не имеет количественной формы, например в биологи. В случае применения эмпирических теорий встает сложная задача корректного представления теоретических понятий с помощью полуэмпирических понятий, обладающих специальными свойствами.

2. Для множества аксиоматических вероятностных теорий классической, субъективистской и логической метод индифферентности является популярным способом задания исходных вероятностей. В настоящее время известен ряд задач, в которых применяется принцип индифферентности, и приводит к парадоксальным решениям.

Дан анализ парадокса о смеси воды и вина, впервые сформулированного Мизесом. Этот парадокс считается наиболее тяжелым аргументом против корректности принципа индифферентности. Показано, что парадокс вызван применением метода к несимметричным ситуациям. Поэтому аргумент Мизеса против этого парадокса не является решающим.

Кроме того, рассмотрен современный подход Миккельсона к этому парадоксу. Показано, что стратегия Миккельсона, основанная на переходе от относительных вероятностей отношений вина к воде или воды к вину к абсолютным вероятностям отношения объема воды к сумме объемов воды и вина или к абсолютной вероятности отношения объема вина к сумме объемов вина и воды, не приводит к парадоксам. Обосновано, что Миккельсон решил частный случай задачи Мизеса, когда смешиваемые жидкости не растворяются друг в друге.

3. Корректное использование колмогоровской теории вероятностей для вычисления субъективных вероятностей предполагает исследование адекватности аксиоматики Колмогорова для субъективистской интерпретации. Показано, что не существует окончательных аргументов как за, так и против адекватности субъективных вероятностей системе аксиом Колмогорова. Имеет смысл говорить об относительной убедительности аргументации по отношению к отдельным аксиомам.

Адекватными являются аксиома о неотрицательности субъективных вероятностей и аксиома о том, что сумма вероятностей противоположных событий равна единице. Ситуация с аксиомой аддитивности суммы вероятностей для конечного числа событий не является однозначной. Все аргументы в пользу этой аксиомы получены при условии справедливости суждений, обоснованность которых, в свою очередь, окончательно не установлена.

Все три рассмотренные аксиомы принимаются большинством исследователей. Наименьшее согласие имеется по аксиоме о счетной аддитивности. Обобщенно аргументы против аксиомы сводятся к следующим возражениям. Невозможно конструктивное описание предпочтений, если оно и возможно, приводит к парадоксам. Описание предпочтений с помощью нестандартного анализа не имеет прагматической значимости. Аргументы за эту аксиому опираются на теорему о голландских условиях пари.

Отсутствие веских оснований правомерного использования или невозможности использования колмогоровской аксиоматики привели к попыткам формализации субъективных вероятностей на основе не колмогоровской аксиоматики. Наиболее известной является аксиоматика Демпстера–Шафера.

4. Проблема объекта эмпирической теории не может быть решена точно, полностью и окончательно. Объект теории – это объект, обладающий определенными базовыми свойствами. Поэтому аналитически эта задача не может быть решена.

5. Согласно концепции Мизеса, эмпирическая теория применима не для любых объектов, а исключительно для тех объектов, для которых теория разработана. У Мизеса объекты теории бесконечные сходящиеся последовательности, закон последовательности не известен и подпоследовательности обладают свойством иррегулярности. Мизес впервые сформулировал проблему объекта эмпирической теории, привел неопровержимую аргументацию значимости этой проблемы, но не сформулировал методологические принципы соответствия данных требованиям к объектам теории.

5а. У авторитетных математиков, в том числе у Колмогорова частотная концепция Мизеса не является популярной. Рядом математиков были предприняты попытки построения конструктивного финитного варианта частотной теории Мизеса. Теоремы конструктивного характера в рамках частотной концепции не были получены. Хакингом вскрыты трудности в получении конструктивных результатов в частотных эмпирических теориях. Нами показано, что отсутствие конструктивных результатов и невозможность создания точной методологии применения частотных концепций явились причиной того, что методология применения частотных теорий не была разработана. Отсутствие методологии применения фундаментных концепций, каковой является концепция Мизеса, является большим упущением для проблемы корректного применения частотных концепций.

5b. Известна дилемма о статусе требований Мизеса к коллективам. Суть дилеммы, предложенные Мизесом требования к коллективам, касаются абстрактных объектов теории, или эти требования также относятся и к реальным данным? В работе [11] Мизес формулирует задачу о соответствии данных требованиям к коллективу. Дан анализ предложенного Мизесом решения этой задачи.

Показано, что Мизес получил решение с помощью стандартной теоретической статистики и не опирался на частотную методологию. Это свидетельствует в пользу гипотезы о том, что требования Мизеса относятся к абстрактным объектам, а не к реальным данным.

6. Считается, что теории Фишера и Неймана–Пирсона являются частотными и эмпирическими. Частотные принципы предполагают, что в основе вероятностных оценок лежат устойчивые частотные оценки. Для того чтобы проверить устойчивость частот, необходимо осуществить множество оценок и они должны быть близкими. Идея повторяемости не реализована в концепциях Фишера и Неймана–Пирсона. Так, согласно основополагающему принципу максимального правдоподобия, оценка максимального правдоподобия строится на основании всех имеющихся данных.

Более того, эти теории не являются и эмпирическими. Во-первых, оценивание параметров распределений априори предполагает существование теоретического распределения. Выборка играет вспомогательную роль для оценивания неизвестных параметров распределения. Во-вторых, проверка гипотез является самым аналитическим разделом статистической теории, а эмпирики всегда возражали против редукции эксперимента к проверке теорий. В-третьих, проверка гипотез редуцируется к фальсификации гипотез.

Фальсификация гипотез не убедительна с логических позиций, так она основана на том, что маловероятное событие не может произойти в первом проведенном эксперименте. С прагматических позиций фальсификация гипотез не убедительна. Так, процедура фальсификации предполагает знание событий с малыми вероятностями. Мы полагаем, что в лучшем случае теории Фишера и Неймана–Пирсона являются квазиэмпирическими и квазичастотными.

7. Дана реконструкция проблемы объекта в фишеровской концепции статистики.

7а. Напрямую Фишер не формулировал проблему объекта эмпирической теории. По-видимому, он не придавал трудностям решения этой проблемы большое значение, полагая, что они будут решены. Фишер полагал, что графическое представление данных приведет к формулированию гипотезы о типе распределения, и, оценив неизвестные параметры, получим полную гипотезу, и тогда проблема объекта будет решена с помощью проверки сформулированной гипотезы.

7b. Вопреки Фишеру, решение проблемы о том, представляют ли данные объект эмпирической теории, связано с большими трудностями. К ним относятся отсутствие процедур объективного группирования данных при применении критерия хи-квадрат Пирсона. Существующие критерии оценивания являются асимптотическими. Методы оценивания параметров чувствительны к предположениям модели. И при небольших отклонениях от предположений модели приводят к грубым оценкам

8. Фишер считал, что недостатки многих статистических методов, например незнание и неспособность контроля фоновых условий, компенсируются предложенным им принципом рандомизации. Дан анализ значимости концепции рандомизации в контексте решения проблемы объекта. Показано, что рандомизация является разумной процедурой, но ее значение ограничивается принятием решений в условиях ограниченности ресурсов. Рандомизированные эксперименты не способны заменить полномасштабные исследования, гарантирующие получение объективных результатов.

9. Теорема закона больших чисел имеет огромное значение для развития теории вероятностей как математической науки. По эпистемологическим и прагматическим основаниям эта теорема не имеет особого значения для приложений. Теорема не позволяет искать устойчивые оценки вероятности с помощью частот, а в лучшем случае позволяет проверять гипотезы о наличии устойчивости. Наиболее сильный аргумент сторонников этой теоремы против эмпирического определения устойчивости – близость величин $p(A)$ и m / n – не доказывает устойчивости, так как вероятность этой близости может быть мала. Эта аргументация опровергается эмпирически, так устойчивость частоты получена в результате многократных повторных экспериментов.

10. Книга Колмогорова, в которой только один параграф посвящен проблеме отношения математики миру опыта, оказала огромное влияние на проблему корректного приложения вероятностной математики. В этом параграфе сформулированы два постулата. Первый постулат имеет частотный характер, он не получил формального воплощения в книге Колмогорова. Второй постулат античастотный, согласно этому постулату, маловероятные события считаются физически невозможными. Этот принцип

является античастотным, так как на основании единственного эксперимента позволяет принять или отклонить гипотезу. На основании этого и других аргументов, приведенных в книге, мы полагаем, что А. Н. Колмогоров не был сторонником частотной концепции.

11. Отсутствие теоретических методов решения проблемы объекта делает актуальным решение этой проблемы иными средствами. Эта идея была реализована в метрологической концепции статистики, разработанной Ю. И. Алимовым. Концепция Алимова опирается на концептуальный аппарат метрологии, и методологию прикладной математики. По Алимову, основная задача прикладной статистки заключается в получении устойчивых спастических характеристик.

Теоретические методы статистики и теории вероятностей адекватны для применения к данным, которые уже обладают устойчивыми характеристиками. Исследованы возможности теоретических методов для получения устойчивых характеристик. Показано, что знаменитая теорема закона больших чисел не имеет приписываемой ей эпистемологической значимости и не обеспечивает решение проблемы устойчивости частот.

С прагматических позиций метрологической концепции нами дана модификация требований Мизеса к объектам эмпирической частотной теории. Требование об иррегулярности при прагматической интерпретации заменятся на требование устойчивости характеристики на выборках. Тогда первое требование Мизеса к коллективам о сходимости последовательности оказывается подчиненным второму требованию об устойчивости характеристик на частичных данных. В нашей интерпретации требование сходимости означает проверку устойчивости на агрегированных данных, а также получение лучших статистических характеристик для всей совокупности данных по отношению к характеристикам, полученным для частичных данных.

В настоящее время имеется внушительное число различных статистических концепций. Как у работающих математиков, так и у специалистов в различных областях знания наиболее популярны фишеровская концепция и концепция Неймана–Пирсона. Нами показано, что метрологическая концепция не является конкурентом концепции Фишера, а является пропедевтикой к применению теории Фишера.

12. Предложена классификация формальных свойств, которыми обладают причинные формализации. Качественно все свойства каузальных связей можно разделить на следующие группы:

а) универсально присущие причинным зависимостям;

б) неуниверсальные, но часто являющиеся характерными атрибутами причинных зависимостей;

в) нехарактерные свойства причинности;

г) непричинные свойства.

Классификация по степени универсальности свойств причинных цепей легла в основу анализа подхода к концепции логического фатализма предложенной Лукасевичем. Лукасевичу удается избежать фаталистического решения с помощью апелляции к бесконечности. Апелляция к бесконечности является очень сильным допущением. В нашем подходе, учитывающем неуниверсальность свойства транзитивности, фатализм не является неизбежным.

13. Дан анализ вероятностно-функциональной причинной концепции Мьюйлока. Достоинством концепции является установленная связь между понятиями причинной зависимости и независимости. Основной результат Мьюйлока отражен в теореме об условной независимости.

14. Рассмотрены различные подходы к анализу парадоксов: онтологическая концепция Картрайт, вероятностно-функциональная Мьюйлока, методология генерации парадоксов Bandyopadhyay.

Мы доказываем, что значимость парадокса переоценивается. Парадокс не имеет особой эпистемологической значимости, и настоящая проблема связана с принятием решения, если парадокс имеет место. В связи с этим была предложена прагматическая методология принятия решений, когда парадокс имеет место [120].

Библиографический список

1. Марков В. А. Феномен случайности: Методологический анализ. Рига: Зинатне, 1988.

2. Maddy P. Indispensability and Practice // The journal of philosophy. 1992. Vol. 39, № 6.

3. Вигнер Е. Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Этюды о симметрии. М., 1971

4. Фишер Р. А. Статистические методы для исследователей. М.: Госстатиздат, 1958.

5. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1968.

6 Алимов Ю. И. Альтернатива методу математической статистики. М., 1980.

7.Тутубалин В. Н. Границы применимости вероятностно-статистических методов и их возможности. М., 1977.

8. Орлов А. И. Эконометрика. М., 2003.

9. Леонов В. П., Ижевский П. В. Об использовании прикладной статистики при подготовке диссертационных работ по медицинским и биологическим специальностям // БГ ВАК. М., 1997. № 5. С. 56–61.

10. Резников В. М. Логико-прагматический анализ проблемы корректного применения статистики // Модели когнитивных процессов (Вычислительные системы, № 168). Новосибирск, 2001. С. 57–67.

11. Мизес Р. Вероятность и статистика. М.; Л., 1930.

12. Mikkelson J.M. Dissolving the wine/water paradox // Brit. J. Phil. Sci. 2004. № 55. P. 137–145.

13. Информация о проблеме Monty Hall широко представлена в Интернете. Например: http://www.letsmakeadeal.com/problem.htm.

14. Van Fraassen B. Laws and symmetry. Oxford: Clarendon Press, 1989.

15. Mayo D. Error and the growth of experimental knowledge. Chicago, 1996.

16. Fisher R. A. The design of experiments.-Edinburgh. Oliver and Boud, 1966.

17. Worrall. J. What evidence in evidence-Based medicine? // Philosophy of science. 2002.

18. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1988.

19. Колмогоров А. Н.Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.

20. Алимов Ю. И. Элементы теории эксперимента: Измерение моментов случайных величин, векторов и процессов. Свердловск: УПИ, 1976.

21. Suppes P. Probabilistic Metaphysics. Oxford: Basil Blackwell, 1984.

22. Suppes P. A probabilistic theory of causality. Amsterdam, 1970.

23. Лукасевич Я. О детерминизме // Вопр. философии. 1995. № 5. С. 60–71.

24. Mulak S. Toward a synthesis of determination and probabilistic formulation of causal relations // Philosophy of science. 1986. Vol. 3, № 53. P. 313–332.

25. Cartwright N. How the laws of physics lie. Oxford University Press, 1983.

26. Хакинг А. Представление и вмешательство.

27. Hacking I. Logic of statistical inference. Cambridge, 1965.

28. Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969.

29. Gillies D. An objective theory of probability. Methuen, 1973.

30. Gillies D. Philosophical theories of probability. L.: Routledge, 2003.

31. Беляев Е. А., Перминов В. Я. Философские и методологические проблемы математики. М.: Изд-во МГУ, 1981.

32. Von Mises R. Mathematical theory of probability and statistics. N. Y.: Academic Press, 1964.

33. Reichenbach H. The theory of probability. California, 1964.

34. Поппер К. Логика и рост научного исследования. М.: Республика, 2004.

35. Levi I. Direct inference // J. of philosophy. 1977. Vol. 74. P. 5–29.

36. Kyburg H. Randomness and the right reference class // J. of philosophy. 1977. Vol. 74. P. 501–521.

37. Тутубалин В. Н. Теория вероятностей. М.: Изд-во МГУ, 1980.

38. Конт О. Курс положительной философии: СПб., 1899.

39. Кендалл М. Дж., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М.: Наука, 1973.

40. Резников В.М. Частотные концепции: анализ оснований и приложений // Вестн. НГУ. 2003. Т. 1. Вып. 1. С. 74–83.

41. Plackett R. L. Karl Pearson and chi-squared Test // International Statistical Review. 1983. № 51. P. 59–72.

42. Giere R. Scientific Inference: Two points of view// Journal of the philosophy of science Association. 1997. Supplement to vol. 64. № 4. P. 180–184.

43. Маркова Е. В., Маслак А. А. Рандомизация и статистический вывод. М.: Финансы и статистика, 1986.

44. Мостеллер Ф., Тьюки Дж. Анализ данных и регрессия. М.: Финансы и статистика, 1982.

45. Shafer G., Vovk V. The sources of Kolmogorov's Grundbegriffe. 2001.

46. Howson C., Urbach P. Scientific reasoning: The Bayesian approach. Illinois, Open Court, 1996.

47. Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н. Компьютерное моделирование как способ познания статистических закономерностей в технике // Вероятностные идеи в науке и философии. Новосибирск, 2003. С. 102–105.

48. Колмогоров А. Н. Несмещенные оценки // Изв. АН СССР. Серия: Математика. 1950. Т. 14. С. 303–326.

49. Резников В. М. Принцип индифферентности: анализ оснований и применений // Вестн. НГУ. 2005. Т. 3. Вып. 1. С. 43–48.

50. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей // Математика, ее содержание, методы и значение. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2.

51. Бернулли Я. О законе больших чисел. М.: Наука, 1986.

52. Хинчин А. Я. Частотная теория вероятностей Р Мизеса и современные идеи теории вероятностей // Вопр. философии. 1961. № 1–2.

53. Колмогоров А. Н. О таблицах случайных чисел // Семиотика и информатика. М.: ВИНИТИ, 1982. Вып. 18. С. 3–13.

54. Шень А.Х. Частотный подход к определению понятия случайной последовательности. Семиотика и информатика. М.: ВИНИТИ, 1982. Вып. 18. С. 14–42.

55. Church A. On the concept of random sequences // Bulletin of Amer. Math. Society. 1940. Vol. 46, № 2. P. 130–135.

56. Ambroskiewicz S. On finite random sequences // LMPS' 87. M., 1987. Vol. 5. Part. 2. P. 6–7.

57. Колмогоров А. Н., Гнеденко В. Б. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.

58. Эльясберг П. С. Вычислительная информация: Сколько ее нужно? Как ее обрабатывать? М.: Наука, 1986.

59. Винер Н. Кибернетика. М.: Наука, 1983.

60. Конт О. Курс положительной философии. СПб., 1899.

61. Нельсон Э. Радикально элементарная теория вероятностей. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1995.

62. Девис М. Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980.

63. Shafer G, Vovk V. Probability and Finance. It is only a Game: Wiley, N. Y., 2001.

64. Алимов Ю. И., Кравцов Ю. А. Является ли вероятность «нормальной» физической величиной? // Успехи физических наук. 1992. Т. 162, № 7. С. 149–182.

65. Алимов Ю. И. Утилитарная логика построения теории вероятностей // Семиотика и информатика. М.: ВИНИТИ, 1985. № 24.

66. Алимов Ю. И. Элементы теории эксперимента: Измерение спектров и статистических вероятностей. Свердловск: УПИ, 1986.

67. Алимов Ю. И. Элементы теории эксперимента: Прогнозирование распределений вероятностей. Свердловск: УПИ, 1988.

68. Рабинович С. Г. Погрешности измерений. Л.: Энергия, 1978.

69. Блехман И. И. и др. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов / И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, М. Г. Пановко. Киев: Наук. думка, 1976.

70. Блехман И. И. и др. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики / И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, М. Г. Пановко. М.: Наука,1983.

71. Кайберг Г. Вероятность и индуктивная логика. М.: Прогресс, 1978.

72. Кравцов Ю. А. Случайность, детерминированность, предсказуемость // Успехи физических наук. 1989. Т. 158.

73. Крылов А. Н. Мои воспоминания. Л.: Судостроение, 1979.

74 Вопенка П. Альтернативная теория множеств. Новосибирск, 2004.

75. Popper K. R.: The Propensity Interpretation of Probability // British Journal for the Philosophy of Science. 1959. Vol. 10. P. 25–42.

76. Popper K. R. A World of Propensities. Bristol: Thoemmes, 1990.

77. Mcgrew T. Direct inference and the problem of induction // The Monist. 2001. Vol. 84, № 2. P. 153–178.

78. Fetzer J.H. 'Probabilistic Metaphysics', in J. H. Fetzer (ed.) Probability and Causality. Dordrecht: D. Reidel. 1988. P. 109–132.

79. Humphreys P. Why propensities cannot be probabilities // Philosophical Review. 1985. № 4. P. 557–570.

80. Gillies D.Varieties of Propensity // British J. for the Philosophy of Science. 2000. № 51. P. 807–835.

81. Barta P., Johns R. Probability and Symmetry // Philosophy of Science. 2001. Vol. 3. P. 109–122.

82. Рассел Б. Человеческое познание. Киев.: Ника-Центр, 1997.

83. Ramsey P. Truth and probability // Studies in subjective probability. Edited by Kyburg H., Smokler H. N. Y., 1963.

84. Howson C. Theories of probability // The British journal philosophy of science. 1995. Vol. 46. № 1. P. 1–32.

85. Schick F. Dutch bookies and money pumps // J. of philosophy. 1986. Vol. 83. P. 112–119.

86. De Finetti B. Theory of probability. N. Y., 1974.

87. De Finetti B. Foresight: Its logical laws, its subjective sources. Studies in subjective probability. Edited by Kyburg H., Smokler H. N. Y., 1963. P. 93–158.

88. Williamson J. Countable additivity and subjective probability // The British journal philosophy of science. 1999. Vol. 50, № 3. P. 401–416.

89. Kelly K. The logic of reliable inquiry. N. Y., 1996.

90. Fraassen van B. Belief and will // The journal of philosophy. Vol. 81. № 5. P. 235–256.

91. Christensen D. Clever Bookies and coherent beliefs // Philosophical review. 1991. Vol. 100, № 2. P. 229–249.

92. Dempster A. A generalation of Bayesian inference // J. of Royal Statistical Society. Series B 30. P. 205–247.

93. Kyburg H., Teng C. Uncertain inference. Cambridge, 2001.

94. Kyburg H. Bayesian and non- Bayesian evidential updating // AI journal. 1987. Vol. 31. P. 271–294.

95. Howson C. Error probabilities in error // J. of the philosophy of science Association. 1997. Supplement to vol. 64, № 4. P. 185–194.

96. Mayo D. Error statistics and learning from error: making a virtue of necessity // J. of the philosophy of science Association. 1997. Supplement to vol. 64, № 4. P. 195–213.

97. Резников В. М. Байесовская и фишеровская концепции в контексте метрологической парадигмы // Вероятностные идеи в науке и философии. Новосибирск, 2003. С. 123–126.

98. Свечников Г. А. Причинность и связь состояний в физике. М.: Наука, 1971.

99. Cartwright N. Causal laws and effective strategies // Nous. 1979. Vol. 1, № 13. P. 419–436.

100. Cartwright N. Dappled world. A study of the boundaries of science. Cambridge: University Press, 2001.

101. Eells E., Sober E. Probabilistic causality and the question of transitivity // Philosophy of Science. 1983. № 50. P. 35–57.

102. Dupre J. Probabilistic Causality Emancipated // Midwest Studies in Philosophy. 1984. IX. pp.169–175.

103. Dupre J. Discussion Probability Causality // Philosophy in Science, 1990. P. 690–698.

104. Карпенко А. С. Фатализм и случайность будущего: Логический анализ. М., 1990.

105. Лукасевич Я. О детерминизме // Вопр. философии. 1995. № 5. С. 60–71.

106. Shoham Y. Nonmonotonic reasoning and causation // Cognitive science, 1990. № 14. P. 213–252.

107. Shoham Y. Temporal logics in AI: Semantical and ontological considerations // Artificial intelligence, 1987. № 33.

108. Резников В. М. Транзитивность Versus бесконечность в анализе проблемы логического фатализма // Третий сиб. конгр. прикл. и индустр. математики. Новосибирск, 1998. С. 202–205.

109. Резников В. М. Анализ концепции Лукасевича логического детерминизма // Пятая всерос. конф. «Проблемы теории, истории и применения современной логики в науке». СПб., 1998. С. 288–290.

110 Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1975.

111. Бернштейн С. Н. Собр. соч. М., 1964. Т. 4.

112. Ширяев А. Н. Вероятность. М., 1980.

113. Боровков А. А. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1972.

114. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир, 1990.

115. Гарднер М. Путешествие во времени. М.: Мир, 1990.

116. Айвазян С. А. и др. Основы моделирования и первичная обработка данных / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. М.: Финансы и статистика, 1983.

117. Bandyopadhyay P. Simpson's paradox under microscopes. APA, PACIFIC DIVISION, 2003.

118. Mittal Y., Homogenity of subpopulations and Simpson's paradox // J. of American Statistical Association 86. 1991. P. 167–172.

119. Резников В. М., Карпович В. Н. Философско-методологические основания исследования причинных зависимостей. Новосибирск: Изд-во НИИ МИОО НГУ, 1998.

120. Резников В. М. Вероятностные парадоксы агрегации // Гуманит. науки в Сибири. 2003. № 1. С. 7–11.

Научное издание

Резников Владимир Моисеевич

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ КОНЦЕПЦИИ: АНАЛИЗ ОСНОВАНИЙ И ПРИЛОЖЕНИЙ

Монография

Ответственный редактор
д-р филос. наук, проф. В. В. Целищев

Редактор *С. Д. Андреева*

Оригинал-макет *А. С. Терёшкиной*

Подписано в печать 29.12.2005 г.
Формат 60×84 1/16. Офсетная печать.
Уч.-изд. л. 9,8. Тираж 300 экз.
Заказ № 611

Лицензия ЛР № 021285 от 6 мая 1998 г.
Редакционно-издательский центр НГУ
630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.